Globaalanalüüs

Viktor Abramov

<viktor.abramov@ut.ee>

Sisukord

1. Topoloogiline muutkond

1.1. Ruum $\mathbb{R}^n$

Ruumi $\mathbb{R}^n$ struktuurid, mida meie järgnevas kasutame on

- meetriline ruum;
- topoloogiline ruum;
- eukleidiline ruum;
- afiinne ruum.

Olgu $\mathbb{R}$ reaalarvude hulk ja $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R}$ (n-korda). Hulga $\mathbb{R}^n$ element x on reaalarvude järjestatud jada $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, seega

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) : x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathbb{R}\}.$$

Defineerime kujutust $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ valemiga

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2}, \tag{1.1.1}$$

kus $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n), y = (y^1, y^2, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$. Hulga $\mathbb{R}^n$ suvaliste elementide x, y, z korral kehtivad järgmised omadused:

1. $d(x, y) \geq 0$, kusjuures $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$;

3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (kolmnurga võrratus).

Omadused 1–3 näitavad, et hulk $\mathbb{R}^n$ muutub meetriliseks ruumiks, kui teda varustada kujutusega d. Kujutust d nimetatakse meetrilise ruumi kas kaugusefunktsiooniks või meetrikaks (*metrics*). Pidades silmas hulga $\mathbb{R}^n$ meetrilist struktuuri, edaspidi hulka $\mathbb{R}^n$ nimetame ruumiks, selle elemente punktideks ja arvu $d(x, y)$ punktide x, y vaheliseks kauguseks. Suvalise punkti $x \in \mathbb{R}^n$ ja suvalise reaalarvu $\epsilon \in \mathbb{R}$ korral ruumi $\mathbb{R}^n$ punktihulka

$$B^n_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < \epsilon\} \subset \mathbb{R}^n,$$

nimetatakse lahtiseks keraks (kui $n = 2$, siis lahtist kera sageli nimetatakse lahtiseks kettaks). Ruumi $\mathbb{R}^n$ alamhulka $U \subset \mathbb{R}^n$ nimetatakse lahtiseks hulgaks, kui suvalise punkti $x \in U$ korral leidub lahtine kera $B^n_\epsilon(x)$ selline, et $B^n_\epsilon(x) \subset U$. On lihtne kontrollida, et topoloogilise ruumi kõik aksiomid on täidetud:

1. kogu hulk ja tühi hulk on lahtised hulgad;

2. lahtiste hulkade ühend on lahtine hulk;

3. lõpliku arvu lahtiste hulkade ühisosa on lahtine hulk.

Seega $\mathbb{R}^n$ muutub topoloogiliseks ruumiks üldise topoloogia mõttes.

Hulga $\mathbb{R}^n$ meetrilise ruumi ja topoloogilise ruumi struktuur on kirjeldatud. Nüüd lühidalt tuletame meelde, kuidas tekib vektorruumi struktuur. Kui liitmist ja reaalarvudega korrutamist defineerida valemitega

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \qquad (1.1.2)$$

kus $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, siis $\mathbb{R}^n$ muutub vektorruumiks. Seega $\mathbb{R}^n$ on vektorruum üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$. Vektorruumi elemente nimetame vektoriteks, komponente nimetame vektori koordinaatideks ja kui soovime rõhutada, et tegemist on vektoriga, kasutame tähistust $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, st kui soovime näidata, et valemis esinev element on vektor, siis tähistame $\mathbf{x}$. Seega kui tegemist on vektoriga siis kirjutame $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$. Järgnevas sageli kasutame maatriksarvutust selleks, et valemite kuju oleks kompaktsem. Vastavates valemites eeldame, et vektori $\mathbf{x}$ koordinaadid moodustavad kas üheveerulise või üherealise maatriksi, st

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

On teada, et $\mathbb{R}^n$ on n-mõõtmeline vektorruum. Suvalises abstraktses n-mõõtmelises vektorruumis puudub kanooniline baas, kuid vektorruumis $\mathbb{R}^n$ selline baas eksisteerib ja ta koosneb baasivektoritest$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, kus

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1). \qquad (1.1.3)$$

Suvaline vektor $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ avaldub baasivektorite kaudu järgmiselt

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = x^i \mathbf{e}_i.$$

Juhime tähelepanu sellele, et valemis on kasutatud Einsteini summerimiskokkulepe (*Einsteini summation convention*), st kui korrutises indeks i esineb kaks korda (üks kord alaindeksina ja teine kord ülaindeksina), siis üle korduva indeksi i summeeritakse.

Vektorruumi $\mathbb{R}^n$ eukleidiline struktuur on määratud vektorite skalaarkorrutisega (*inner product*)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i \, y^i, \tag{1.1.4}$$

kus $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n), \mathbf{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ on vektorruumi $\mathbb{R}^n$ vektorid. Vektori $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ pikkust defineeritakse valemiga

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \big((x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2\big)^{1/2}. \tag{1.1.5}$$

On ilmne, et $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ on eukleidilise ruumi V^n ortonormeeritud baas, st $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, kus δ_{ij} on Kroneckeri sümbol. Suvaliste vektorite korral kehtivad järgmised võrratused:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \tag{1.1.6}$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \qquad \text{(kolmnurga võrratus)} \tag{1.1.7}$$

Vektorite $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ vahelist nurka defineeritakse valemiga

$$\cos\,\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \tag{1.1.8}$$

ning valemist (1.1.6) järeldub, et $-1 \leq \cos\ \theta \leq 1$. Mainime, et $\mathbb{R}^n$-i meetrilise ruumi struktuuri ja eukleidilise ruumi struktuuri vahel on teatud seos, mille võime kirjeldada valemiga

$$d(x, y) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \tag{1.1.9}$$

Ruumi $\mathbb{R}^n$ afiinne struktuur on vähem tuntud. Ruumi $\mathbb{R}^n$ afiinse ruumi struktuuri kirjeldamiseks, tuletame meelde afiinse ruumi definitsiooni. Olgu $\mathcal{A}$ mittetühi hulk, mille elemente nimetame punktideks, ja V vektorruum üle korpuse $\mathbb{R}$. Hulka $\mathcal{A}$ nimetame *afiinseks ruumiks*, kui on täidetud järgmised aksioomid (afiinse ruumi aksiomid):

- on määratud kujutus $\mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$, mis seab igale paarile $(x, \mathbf{v})$ vastavusse üheselt määratud $\mathcal{A}$ punkti, mille tähistame $x + \mathbf{v}$;
- kehtib $x + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (x + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$;
- suvaliste punktide $x, y \in \mathcal{A}$ korral leidub üks ja ainult üks vektor $\mathbf{v}$ selline, et $x + \mathbf{v} = y$ (vektorit $\mathbf{v}$ sageli tähistatakse $\overrightarrow{xy}$).

Vektorruumi V nimetatakse assotsieeritud vektorruumiks. Seega afiinne ruum on tegelikult paar $(\mathcal{A}, V)$, kus $\mathcal{A}$ on afiinne ruum ja V on sellega assotsieeritud vektorruum. Ruum $\mathbb{R}^n$ muutub afiinseks ruumiks (assotsieeritud vektorruum on eukleidiline ruum $\mathbb{R}^n$), kui defineerime kujutust $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, millest räägitakse eespool antud definitsiooni esimeses aksioomis, järgmiselt: kui $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{v} = (v^1, v^2, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$, siis

$$(x, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to x + \mathbf{v} = (x^1 + v^1, x^2 + v^2, \ldots, x^n + v^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Afiinse ruumi struktuuri raames on võimalik vaadelda ruumi $\mathbb{R}^n$ sirgeid, tasandeid ja m-tasandeid. Kui $\mathbf{v}$ on null-vektorist erinev vektor ja $p \in \mathbb{R}^n$ on mingi punkt, siis punkti p läbivaks sirgeks sihivektoriga $\mathbf{v}$ nimetatakse punktihulka $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$, mis on määratud valemiga

$$\mathcal{L} = \{p + t\,\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Kui $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ on kaks mittekollineaarset vektorit, siis tasandiks $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ rihivektoritega $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ nimetatakse punktihulka

$$\mathcal{P} = \{p + t_1\,\mathbf{v} + t_2\,\mathbf{w} : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Reeperit $\{o; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, kus o on punkt $o = (0, 0, \ldots, 0)$, nimetatakse afiinse ruumi $\mathbb{R}^n$ kanooniliseks reeperiks. Kanooniline reeper indutseerib ruumi $\mathbb{R}^n$ kanoonilise ristkoordinaadisüsteemi, mille teljestik koosneb telgedest

$$\mathcal{L}_i = \{o + t\,\mathbf{e}_i : t \in \mathbb{R}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Järgnevas meie alati eeldame, et ruum $\mathbb{R}^n$ on varustatud kanoonilise ristkoordinaadisüsteemiga, mis on konstrueeritud selle ruumi afiinse struktuuri raames. Ruumi $\mathbb{R}^1$ nimetame sirgeks, ja ruumi $\mathbb{R}^2$ nimetame tasandiks. Tasandi $\mathbb{E}^2$ ristkoordinaate mõnikord (tavaliselt ülesannetes) tähistame x, y ja kolmemõõtmelise ruumi $\mathbb{R}^3$ ristkoordinaate tähistame x, y, z.

1.2. Topoloogilise muutkonna mõiste

Enne topoloogilise muutkonna defineerimist, tuletame meelde üldise topoloogia mõningaid mõisteid. Topoloogilise ruumi $\mathcal{T}$ lahtiste hulkade peret $\mathcal{S}$ nimetatakse selle ruumi lahtise topoloogia baasiks, kui $\mathcal{T}$ iga lahtise hulga U korral leiduvad hulgad $S_\alpha \in \mathcal{S}, \alpha \in \mathcal{A}$, kus $\mathcal{A}$ on indeksite mingi hulk, sellised, et $U = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} S_\alpha$. Topoloogilist ruumi $\mathcal{T}$ nimetatakse sidusaks (*connected*) topoloogiliseks ruumiks, kui ruumi $\mathcal{T}$ ei ole võimalik esitada kahe (või rohkem) mittetühja lahtise hulga U, V, mille ühisosa on tühihulk, ühendina, st $\mathcal{T} = U \cup V, U \cap V = \emptyset$. Topoloogilist ruumi $\mathcal{T}$ nimetatakse joonsidusaks (*path-wise connected*), kui suvaliste kahe punkti $p, q \in \mathcal{T}$ korral leidub neid ühendav pidev joon, st pidev kujutus $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{T}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q$. Topoloogilist ruumi $\mathcal{T}$ nimetatakse ühelisidusaks (*simply connected, 1-connected*), kui selle ruumi fundamentaalrühm $\pi_1(\mathcal{T})$ on triviaalne (topoloogilise muutkonna fundamentaalrühma käsitletakse käesoleva peatüki viimases paragrahvis) ehk, teiste sõnadega, suvalise pideva kinnise joone $\gamma : [a, b] \to \mathcal{T}, \gamma(a) = \gamma(b)$ korral leidub ruumi $\mathcal{T}$ teisenduste pidev parv selline, et joon deformeerub punktiks (piltlikult öeldes, suvalist silmust võib kokku tõmmata üheks punktiks). Ruumi $\mathcal{T}$ lahtiste hulkade pere on selle ruumi lahtise topoloogia baas parajasti siis, kui suvalise punkti $x \in \mathcal{T}$ ja selle punkti suvalise ümbruse U korral leidub hulk $S \in \mathcal{S}$ perest $\mathcal{S}$ nii, et $x \in S \subseteq U$.Toploogilise ruumi T lahtiste hulkade peret $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, kus iga α korral $U_\alpha \subset T$, nimetatakse ruumi T lahtiseks katteks, kui $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = T$. Topoloogilist ruumi nimetatakse kompaktseks, kui iga lahtise kate korral leidub selle katte lõplik alamkate. Kuna käesoleva kursuse põhiruumiks on topoloogiline ruum $\mathbb{R}^n$ tuletame meelde, et Bolzano-Weierstrassi teoreemist järeldub kompaktsuse kriteerium

> Ruumi $\mathbb{R}^n$ alamhulk $M \subset \mathbb{R}^n$ on kompaktne parajasti siis, kui M on kinnine ja tõkestatud.

Kujutust $\phi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, kus $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ on topoloogilised ruumid, nimetatakse homöomorfismiks, kui

- ϕ on bijektsioon;
- ϕ on pidev kujutus;
- pöördkujutus ϕ^{-1} on ka pidev.

Öeldakse, et topoloogilised ruumid $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ on homöomorfsed, kui leidub nende vaheline homöomorfism $\phi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$. Kui topoloogilised ruumid T, T' on homöomorfsed, siis kirjutame $T \simeq T'$. Topoloogia seisukohalt homöomorfsed ruumid on ekvivalentsed. Topoloogilist ruumi nimetatakse Hausdorffi ruumiks (eralduvaks ruumiks), kui suvaliste punktide $x, y \in \mathcal{T}$ korral leidub punkti x ümbrus U ja punkti y ümbrus V sellised, et $U \cap V = \emptyset$ (teine Hausdorffi eralduvusaksioom).

Definitsioon 1.2.1. Topoloogilist ruumi M nimetatakse n-mõõtmeliseks topoloogiliseks muutkonnaks või topoloogiliseks n-muutkonnaks (*topological n-manifold*), kui ta rahuldab kolm tingimust:

- M on Hausdorffi ruum;
- ruumis M leidub loenduv baas (teine Hausdorffi loenduvusaksioom);
- M on lokaalselt eukleidiline ruum, st suvalise punkti $x \in M$ korral leidub selle punkti ümbrus, mis on homöomorfne ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtise hulgaga.

Topoloogilist n-muutkonda M nimetatakse kompaktseks (sidusaks, kaarsidusaks, ühelisidusaks), kui M on kompaktne (sidus, joonsidus, ühelisidus) topoloogiline ruum. ▲

Arvu n nimetatakse muutkonna M dimensiooniks ja tähistatakse $\dim M = n$. Mainime, et üldsust kitsendamata kolmandas tingimuses võime ruumi $\mathbb{R}^n$ asendada kas lahtise keraga või lahtise kuubiga.

Muutkonna definitsiooni esimesed punktid määravad muutkonna üldist topoloogiat. Need tingimused näitavad, et muutkonna üldine topoloogia peab olema "hea". Tavaliselt nende tingimuste kontroll on lihtne, kuna sageli muutkond on sellise topoloogilise ruumi alamruum, kus Hausdorffi eralduvusaksioom ja loenduvusaksioom on täidetud.

Muutkonna definitsiooni kolmas tingimus on aga tähtis. Kolmanda tingimuse tõttu muutkonnal tekib väga tähtis struktuur, mida nimetatakse lokaalseks kaardiks või lokaalseks koordinaadisüsteemiks. Tõepoolest suvalise punkti $x \in M$ korral leidub selle punkti ümbrus $U \subset M$, ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtine hulk $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ ja homöomorfism $\phi : U \to U'$. Kui $q \in U$, siis

$$q \in U \mapsto \phi(q) = (x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q)) \in U' \subset \mathbb{R}^n. \qquad (1.2.1)$$

Seega muutkonna ümbruse U igale punktile q vastab reaalarvude järjestatud jada $x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q)$, kusjuures need arvud sõltuvad punktist q, st nad on punkti q funktsioonid. Arvestades, et vastavus 1.2.1 on bijektiivne ja ta säilitab U topoloogiat näeme, et ümbruse U punktid on korrektselt parametriseeritud ruumi $\mathbb{R}^n$ punktidega. Seega arve $x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q)$ võime vaadelda punkti q koordinaatidena. Seega muutkonnal on määratud lokaalne koordinaadisüsteem ja seetõttu paari (U, ϕ) nimetatakse n-muutkonna M *lokaalseks kaardiks* või *lokaalseks koordinaadisüsteemiks*. Kuna $x^1, x^2, \ldots, x^n$ on ümbruse U punkti funktsioonid, neid nimetatakse lokaalse kaardi koordinaatfunktsioonideks või, lihtsustades terminoloogiat, lokaalseteks koordinaatideks. On ilmne, et iga koordinaatfunktsioon x^i on pidev funktsioon.

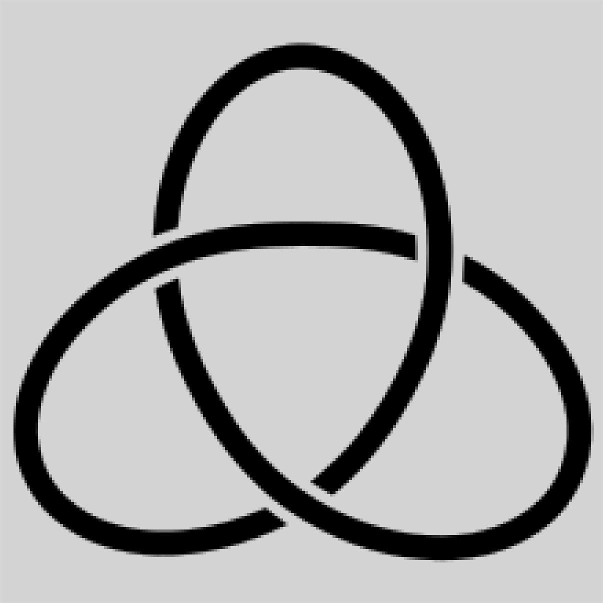
Lokaalsete kaartide kogumit $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ nimetatakse muutkonna M *atlaseks*, kui lahtised ümbrused U_α moodustavad muutkonna M lahtise katte, st

$$M = \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

Esimesel pilgul paistab, et definitsioon 1.2.1 ei ole märkimisväärne, kuna temas defineeritakse topoloogiliste ruumide ühte klassi, kusjuures tegemist on spetsiaalse klassiga, mis on kitsendatud rangete tingimustega. Üldise topoloogia seisukohalt see on õige, kuna n-muutkonna topoloogia lahtiste hulkade mõttes on üsna triviaalne. Miks siis topoloogiliste muutkondade teooria on alati aktuaalne, kiiresti arenev ja populaarne uurimisvaldkond? Põhjuseks on see, et n-muutkond on geomeetrilise pinna üldistus, ja kui räägitakse muutkonna topoloogiast, siis peetakse silmas muutkonna globaalset struktuuri. Peale seda, osutub, et topoloogiliste muutkondade teoria on väga tähtis teistes matemaatika valdkondades, teoreetilises füüsikas ja mehaanikas.

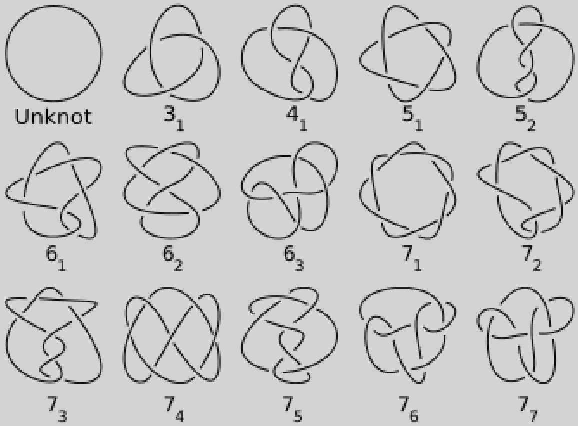
Näide 1.2.2. Topoloogilise n-muutkonna kõige lihtsam näide on ruum $\mathbb{R}^n$. Tõepoolest, üldises topoloogias näidatakse, et ruumi $\mathbb{R}^n$ on Hausdorffi ruum ja temas leidub lahtise topoloogia loenduv baas, seega definitsiooni 1.2.1 esimesed kaks tingimust on täidetud. Kolmas tingimus on ka täidetud, kuna homöomorfismiks võtame samasuskujutuse $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Kui topoloogiline n-muutkond M on homöomorfne ruumiga $\mathbb{R}^n$ (või selle lahtise keraga $B \subset \mathbb{R}^n$), siis öeldakse, et M on triviaalne n-muutkond.

Näide 1.2.3. Ruumi $\mathbb{R}^n$ iga lahtine hulk $U \subset \mathbb{R}^n$ on topoloogiline ruum (topoloogilise ruumi $\mathbb{R}^n$ topoloogiline alamruum). On lihtne näidata, et U on topoloogiline n-muutkond. Tõepoolest, definitsiooni 1.2.1 esimesed tingimused on täidetud, kuna U on topologilise ruumi $\mathbb{R}^n$ topoloogiline alamruum. Kolmas tingimus on ka täidetud, kuna homöomorfismiks võtame $\mathrm{id} : U \to U$. Antud näide paistab olevat lihtne ja triviaalne, kuid tegelikult ta annab võimaluse topoloogiliste muutkondade suure klassi konstrueerimiseks, kusjuures selle klassi topoloogilised muutkonnad on mittetriviaalsed. Tõepoolest, oletame, et kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^3$ on antud sõlm $\mathcal{K}$ (*knot*) (vt joonis 16 (b)), st kolmnemõõtmelises ruumis asetsev joon, ta on ilma eneselõikamisteta ja sõlme nimetatakse mittertiviaalseks, kui teda ei saa pidevate teisenduste abil (katki rebima ei tohi) teha ringjooneks. Sõlm, kui punktihulk on kinnine hulk $\mathbb{R}^3$ topoloogias. Järelikult sõlme täiend kolmemõõtmelises ruumis $M = \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{K}$ on ruumi $\mathbb{R}^3$ lahtine alamhulk, järelikult M on kolmemõõtmeline topoloogiline muutkond. On ilmne, mida keerulisem on sõlme struktuur, seda keerulisem on vastava muutkonna struktuur. Ülalpool kirjeldatud kolmemõõtmelise muutkonna konstruktsioon näitab, et selliste muutkondade klassifikatsioon on tihedalt seotud sõlmede teooriaga. Sõlmede teooria tähtsaimaks probleemiks on sõlmede klassifikatsioon ja ta on olnud raskeks probleemiks alates 19. sajandist. Esimesed katsed sõlmede klassifitseerimiseks olid inspireeritud Lord Kelvin (väljapaistev füüsik, 1824 - 1907)



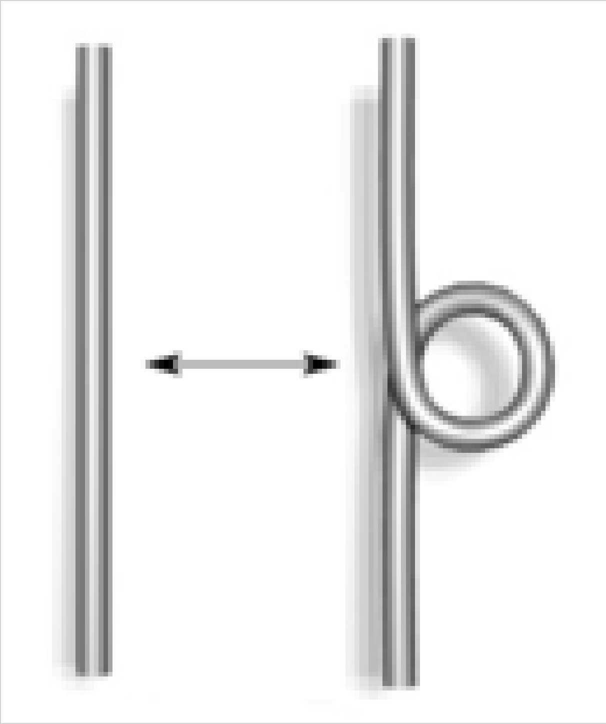
Joonis 1: Trefoil knot

poolt, kes arvas, et aatomid on eetri (hüpoteetiline maailmaruumi täiteaine) keerised sõlme struktuuriga. Kasutades oma teooriat Lord Kelvin püüdis leida seaduspärasust Mendelejevi elementide perioodilisussüsteemis ja selleks tal oli vaja sõlmede klassifikatsiooni. Tema palvel matemaatik Peter Guthrier Tait hakkas uurima sõlmi ja ta koostis sõlmede esimesi tabeleid. Oluline läbimurd sõlmede

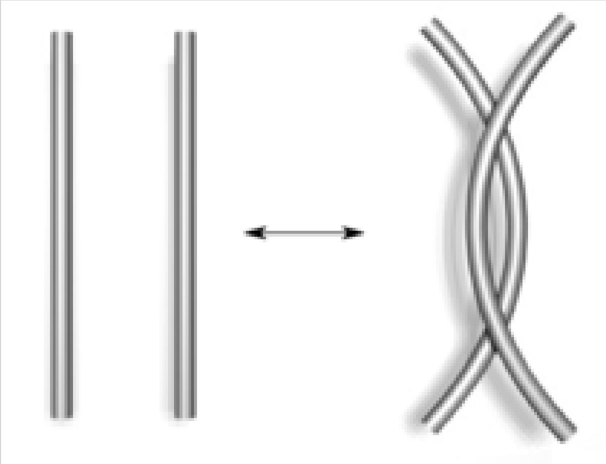


Joonis 2: Sõlmede tabel, eneselõikamiste arv 0 kuni 7, Alexander tähistused

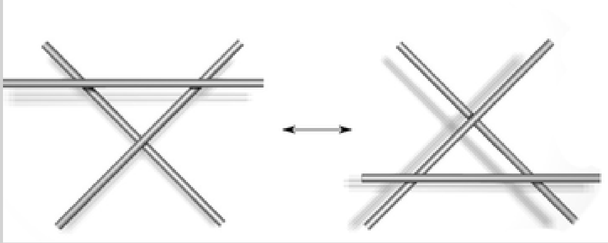
teoorias oli tehtud eelmise sajandi esimesel poolel, kui ameerika matemaatik James Waddell Alexander (1888 - 1971) konstrueeris sõlmede polünomiaalseid invariante, mida praegu nimetatakse sõlme Alexander'i polünoomideks.



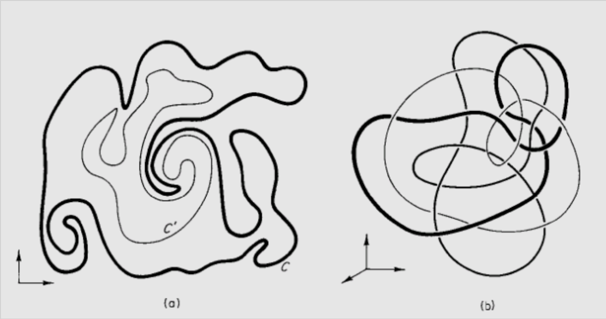
Joonis 3: Reidemeister move 1



Joonis 4: Reidemeister move 2



Joonis 5: Reidemeister move 3



Joonis 6: (a) 2-muutkond on tasandi lahtine alamhulk, mis asetseb joonte C ja C' vahel; (b) 3-muutkond, mis on saadud kahe sõlme eemaldamisega ruumist $\mathbb{R}^3$

Näide 1.2.4. Mittetriviaalse muutkonna lihtsaimaks näiteks tasandi korral on ühikringjoon S^1 ja kolmemõõtmelise ruumi korral on ühiksfäär S^2. Ühikringjoont S^1 määrame võrrandiga

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1,$$

ja ühiksfäär on kolmemõõtmelise ruumi $\mathbb{R}^3$ punktihulk, mille iga punkti $x = (x^1, x^2, x^3)$ koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1. \tag{1.2.2}$$

Järelikult

$$S^1 = \{x = (x^1, x^2) \in \mathbb{E}^2 : ||x|| = 1\} \subset \mathbb{E}^2,$$
$$S^2 = \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Järgnevas meie kasutame n-mõõtmelise ühiksfääri mõistet, mille definitsioon on järgmine: n-mõõtmeliseks ühiksfääriks nimetame ruumi $\mathbb{R}^{n+1}$ punktihulka, mille iga punkti $x = (x^1, x^2, \ldots, x^{n+1})$ koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = 1.$$

Seega

$$S^n = \{x = (x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}.$$

Näitame, et S^2 on 2-muutkond. Definitsiooni 1.2.1 esimesed kaks tingimust on täidetud, kuna ühiksfääri topoloogia on indutseeritud ruumi $\mathbb{R}^3$ topoloogiaga. Näitame, et ühiksfäär on lokaalselt eukleidiline. Selleks konstrueerime ühiksfääri lahtise kate järgmiselt: tähistame $S^2_{x^i>0}$ ($S^2_{x^i<0}$) ühiksfääri sellist punktihulka, mille iga punkti i-s koordinaat rahuldab tingimust $x^i > 0$ ($x^i < 0$). On ilmne, et meil on kuus hulka:

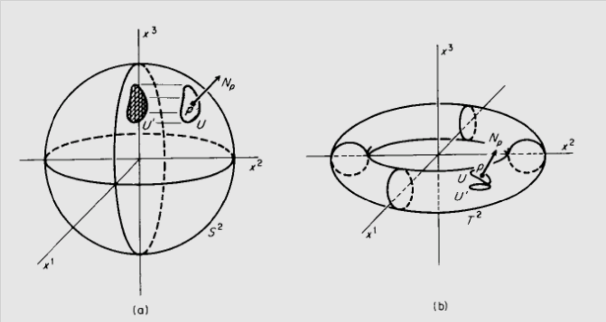
$$S^2_{x^1>0}, S^2_{x^2>0}, S^2_{x^3>0}, S^2_{x^1<0}, S^2_{x^2<0}, S^2_{x^3<0}, \tag{1.2.3}$$

kusjuures kõik hulgad on lahtised sfääri topoloogia suhtes. Kehtib

$$(\bigcup_{i=1}^{3} S^2_{x^i>0}) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{3} S^2_{x^i<0}) = S^2,$$

st lahtiste hulkade pere on ühiksfääri lahtine kate. Näitame, et iga hulk sellest perest on homöomorfne $\mathbb{E}^2$ lahtise hulgaga (vt joonis 2). Võtame, näiteks, hulga $S^2_{x^3>0}$ ja projekteerime selle hulga punktid (x^1, x^2)-koordinaattasandile ristprojektsiooni abil, st

$$\phi_3^+ : x = (x^1, x^2, x^3) \in S^2_{x^3>0} \to \phi_3^+(x) = x' = (x^1, x^2, 0) \in (x^1, x^2) - \text{tasand}.$$



Joonis 7: (a) (b)

On ilmne, et $\phi_3^+ : S^2_{x^3>0} \to D^2$ on homöomorfism, kus $D^2 = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{E}^2 : (x^1)^2 + (x^2)^2 < 1\}$. Analoogiliselt näitame, et pere kõik teised hulgad on homöomorfsed tasandi lahtiste hulkadega. Seega, S^2 on topoloogiline 2-muutkond. Sfäär S^2 on kaetud kuue kordinaadikaardiga ja kogumit

$$\mathcal{A}_S = \{(S^2_{x^i>0}, \phi_i^+), (S^2_{x^i<0}, \phi_i^-)\}_{i=1}^3,$$

nimetatakse sfääri atlaseks. On ilmne, et atlaseid on lõpmata palju ja nende seas on atlaseid kaartide minimaalse arvuga. Kui kaks koordinaadikaardi kuuluvad ühte atlasse ja nende ühisosa ei ole tühi, siis muutkonna vastavas piirkonnas meil on kaks koordinaadisüsteemi, st igale punktile vastavad ühes koordinaadisüsteemis koordinaatide komplekt, ja teises. On ilmne, et ühe koordinaadisüsteemi koordinaadid avalduvad teise koordinaadisüsteemi kaudu ja vastavaid funktsioone nimetatakse antud atlase kas üleminekufunktsioonideks (ühest koordinaafisüsteemist teisse) või koordinaadikaartide kokkukleepimise funktsioonideks. Vaatame, millised on eespool konstrueeritud sfääri atlase kokkukleepimise funktsioonid. Näiteks, vaatleme kahte koordinaadikaarti $(S^2_{x^3>0}, \phi_3^+)$, $(S^2_{x^2>0}, \phi_2^+)$. Kehtib $S^2_{23} = S^2_{x^3>0} \bigcap S^2_{x^2>0} \neq \emptyset$. Seega, kui $p = (p^1, p^2, p^3) \in S^2_{23}$, siis tähistame

$$\phi_3^+(p) = (\xi^1(p), \xi^2(p)), \quad \text{koordinaadid ühe kaardi suhtes}$$

ja

$$\phi_2^+(p) = (\eta^1(p), \eta^2(p)). \quad \text{koordinaadid teise kaardi suhtes}$$

On ilmne, et $\xi^1(p) = p^1, \xi^2(p) = p^2$ ja $\eta^1(p) = p^1, \eta^2(p) = p^3$. Kuna p on sfääri punkt, tema koordinaadid rahuldavad sfääri võrrandit, seega

$$p^3 = \sqrt{1 - (p^1)^2 - (p^2)^2}.$$

Siit leiame, kuidas ühed lokaalsed koordinaadid avalduvad teiste lokaalsete koordinaatide kaudu

$$\eta^1 = \xi^1, \;\; \eta^2 = \sqrt{1 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2}, \tag{1.2.4}$$

ja sellega kahe koordinaadikaardi kokkukleepimise funktsioonid on leitud. Lisaks mainime, et kujutuse 1.2.4 määramispiirkond on $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 < 1, \xi^2 > 0$ ja muutumispiirkond on $(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 < 1, \eta^2 > 0$.

Bolzano-Weierstrassi kriteeriumi järgi S^2 on kompaktne muutkond. Seetõttu S^2 ei saa olla homöomorfne ruumiga $\mathbb{E}^2$ ja seega S^2 on mittetriviaalne muutkond. Seega, sfääri ei saa kata ühe koordinaadisüsteemiga! Seega, sfäär on ühelisidus, kompaktne 2-muutkond.

Näide 1.2.5. Meenutame, et pöördpinnaks ruumis $\mathbb{R}^3$ nimetatakse pinda, mis saadakse joone γ pöŕamise ümber telge abil. Näiteks, kui (yz)-koordinaattasandil on antud joon γ määratuna (ilmutamata) võrrandiga $f(y,z)=c$, kus selle joone suvalise punkti korral kehtib $y \geq 0$ ja c on reaalarv, siis selle joone pööramisel ümber z-koordinaattelge tekib pöördpind, mille võrrand on $f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = c$. Kui joon on määratud parameetrilise võrrandiga $\gamma(t) = (y(t), z(t))$, $t \in I$, kus $y(t) \geq 0$ iga parameetri t väärtuse korral ja $I \subseteq \mathbb{R}$, siis pöördpinna parameetriline võrrand on

$$r(u,v) = (y(u)\ \cos(v), y(u)\ \sin(v), z(u)), \quad u \in I, v \in [0, 2\pi].$$

Tooriks (rõngaspinnaks) T^2 nimetatakse pöördpinna, mis tekib ringjoone pööramisel ümber telge. Kui, näiteks, ringjooneks on valitud ühikringjoon, mis asub (yz)-koordinaatasandil ja mille keskpunkt on punkt koordinaatidega $(0,2,0)$, siis toori võrrand on üsna kohmakas

$$x^2+y^2+z^2+3 = 4\sqrt{x^2+y^2},$$

või saades lahti ruutjuurest

$$x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-10x^2-10y^2+6z^2+9=0.$$

Toori parameetriline võrrand on meeldivam

$$r(u,v) = (\cos u \cos v + 2\cos v, \cos u \sin v + 2\sin v, \sin u), \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi.$$

Tõestame, et toor T^2 on 2-muutkond kasutades normaalvektorit nii, nagu on see näidatud joonisel 2. Mainime, et toor on sidus (kuid mitteühelisidus!) kompaktne ja mittetriviaalne 2-muutkond.

Meenutame, et topoloogilist ruumi $\mathcal{T}$ nimetatakse normaalseks topoloogiliseks ruumiks, kui suvaliste kinniste hulkade $K, L \subset \mathcal{T}$ korral leiduvad nende ümbrused U, V (lahtised hulgad $K \subset U, L \subset V$) nii, et $U \bigcap V = \emptyset$. Topoloogilist ruumi $\mathcal{T}$ nimetatakse metriseeritavaks ruumiks, kui ruumi $\mathcal{T}$ saab teha meetriliseks ruumiks varustades teda meetrikaga d nii, et ruumi $\mathcal{T}$ topoloogia on indutseeritud meetrikaga d. Järgmine teoreem (ilma tõestuseta) kirjeldab topoloogilise muutkonna topoloogiat (üldise topoloogia mõttes):

Teoreem 1.2.6. *Kui M on topoloogiline n-muutkond, siis M on lokaalselt sidus, lokaalselt kompaktne, normaalne, metriseeritav topoloogiline ruum, ja M on loenduva kogumi kompaktsete alamhulkade ühend.*

Topoloogilise muutkonna definitsioonis on tegelikult üks nüanss. Nimelt, meie vabalt opereerime sellise mõistega, nagu topoloogilise muutkonna dimensioon. Muutkonna dimensiooniks meie nimetame mudelruumi $\mathbb{R}^n$ dimensiooni n. Kuid selleks, et dimensiooni mõiste oleks korrektne, tuleb näidata, et arv n on üks ja sama iga muutkonna M punkti korral, sest, kui leidub punkt $p \in M$ ja selle ümbrus U, mis on homöomorfne lahtise hulgaga $U' \subset \mathbb{R}^m, m \neq n$, siis dimensiooni mõistes ei ole mõtet. Dimensiooni küsimus on keeruline, ja selles kursuses meie ainult mainime, et dimensiooni mõiste korrektsus tugineb Brouwer'i teoreemile

Teoreem 1.2.7. *(Brouwer'i teoreem ruumi $\mathbb{R}^n$ piirkonna invariantsusest) Kui $U \subset \mathbb{R}^n$ on ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtine alamhulk ja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ on bijektiivne ja pidev kujutus, siis alamhulga U kujutis $V = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ on lahtine hulk ja ϕ on homöomorfism U ja V vahel.*

Mainime, et piirkonna invariantsuse teoreemist järeldub, et lahtine hulk $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ei saa olla homöomorfne lahtise hulgaga $V \subseteq \mathbb{R}^m, m < n$.

1.3. Muutkond rajaga. Kokkukleepimine ja lahtilõikamine

Poolsfäär $S^2_{z\geq 0}$ ja silinder $\bar{C}^2_h$ kõrgusega h, kus

$$\bar{C}^2_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq h, h \in \mathbb{R}_+\},$$

on 2-muutkonna rajaga lihtsad näited. Lahtine poolsfäär $S^2_{x^3>0}$ ja lahtine silinder C^2_h, kus

$$C^2_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, 0 < z < h, h \in \mathbb{R}_+\},$$

on 2-muutkonnad. Kui lahtist poolsfääri täiendame ekvaatori punktidega (ekvaatoriks nimetame ühiksfääri ja (x,y)-koordinaattasandi lõikejoont ning tähistame L), siis poolsfäär $S^2_{z\geq 0} = S^2_{z>0} \cup L$ on kinnine hulk ruumi $\mathbb{R}^3$ topoloogias. Mainime, et ekvaatori L punktid moodustavad ühikringjoone, seega see on ühedimensionaalne muutkond. Lahtist silindrit C^2_h täiendame kahe ringjoone L_1, L_2 punktidega, kus

$$L_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1,\ z = 0\} \ \ L_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1,\ z = h\}.$$

Silinder $\bar{C}^2_h = C^2_h \bigcup L_1 \bigcup L_2$ on kinnine punktihulk. Mainime, et L_1, L_2 on ühikringjooned, seega $L_1 \cup L_2$ on homöomorfne 1-muutkonnaga $S^1 \bigcup S^1$. Järelikult vaadeldud pindade korral tegemist on olukorraga, kus osa punkte moodustab 2-muutkonna ja osa punkte moodustab 1-muutkonna. Sellist struktuuri nimetame muutkonnaks rajaga ja käesolevas punktis anname sellise struktuuri definitsiooni.

Eespool toodud näitede üldistamiseks, defineerime ruumi $\mathbb{R}^n$ kaks alamruumi H^n ja ∂H^n järgmiselt:

$$H^n = \{x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.3.1}$$

$$\partial H^n = \{x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\}. \tag{1.3.2}$$

On ilmne, et $H^n \backslash \partial H^n$ on n-muutkond, kuna suvalise punkti $p \in H^n \backslash \partial H^n$ korral leidub selle punkti ümbrus, mis on homöomorfne $\mathbb{R}^n$ lahtise hulgaga. Analoogiliselt ∂H^n on ruumiga $\mathbb{R}^n$ homöomorfne $(n-1)$-muutkond. Muutkonda ∂H^n nimetatakse H^n rajaks.

Definitsioon 1.3.1. Topoloogilist ruumi M nimetatakse n-muutkonnaks rajaga (*manifold with boundary*), kui M on Hausdorffi ruum lahtise topoloogia loenduva baasiga ja suvalise punkti $p \in M$ korral on täidetud üks ja ainult üks järgmistest tingimustest:

- leidub punkti p ümbrus $U \subset M$ ja homöomorfism $\phi : U \to U'$ selline, et kehtib $U' \subset H^n \setminus \partial H^n$;
- leidub punkti p ümbrus U ja homöomorfism $\phi : U \to U'$, kus $U' \subset H^n$ ja $\phi(p) \in U' \bigcap \partial H^n$.

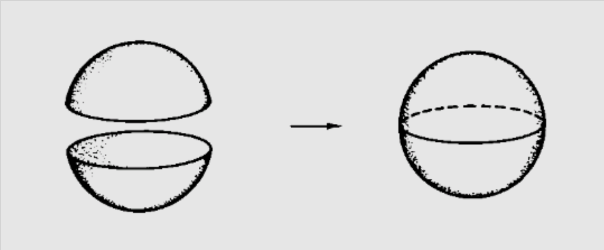
Kui punkt p rahuldab esimest tingimust, punkti p nimetatakse muutkonna M *sisepunktiks*. Kui punkt p rahuldab teist tingimust, punkti nimetatakse muutkonna M *raja punktiks*. ▲

Raja punktide hulka tähistatakse ∂M ja nimetatakse muutkonna M rajaks. On võimalik näidata, et muutkonna raja ∂M on $(n-1)$-muutkond.

Muutkondi rajaga võib kasutada uute muutkondade konstrueerimiseks. Selleks kasutatakse muutkondade sidusa summa mõistet. Oletame, et M, N on n-muutkonnad rajaga, kusjuures iga muutkonna raja on sidus ja rajad $\partial M, \partial N$ on homöomorfsed, st $\phi : \partial M \to \partial N$ on homöomorfism. Kaks punkti $p \in M, q \in N$ nimetame ekvivalentseteks ja tähistame $p \sim q$, kui $p \in \partial M, q \in \partial N$ ning $q = \phi(p)$.

Definitsioon 1.3.2. Olgu $M \bigcup N$ muutkondade ühisosata ühend. Muutkondade M, N *sidusaks summaks* nimetame topologilist ruumi $M \bigcup N/_\sim$ (faktorruumi topoloogiaga) ja tähistame $M \sharp N$.

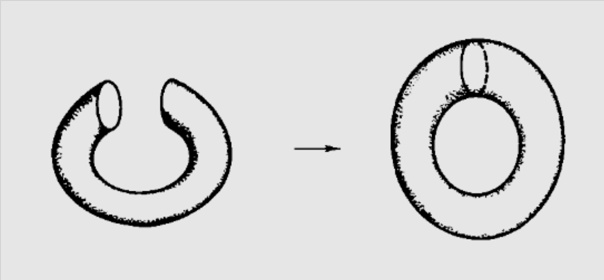
On võimalik näidata, et $M \sharp N$ on n-muutkond (ilma rajata). Näitame, kuidas sidusat summat saab rakendada uute pindade konstrueerimisel. Kahe poolsfääri sidus summa on sfäär (vt joonis 3). Analoogiliselt kui moodustame silindri ring-



Joonis 8: Kahe poolsfääri sidus summa on sfääri

joonte L_1, L_2 sidusa summa, siis tulemuseks on pind, mida nimetatakse tooriks või rõngaspinnaks ja tähistatakse T^2 (vt joonis 4).

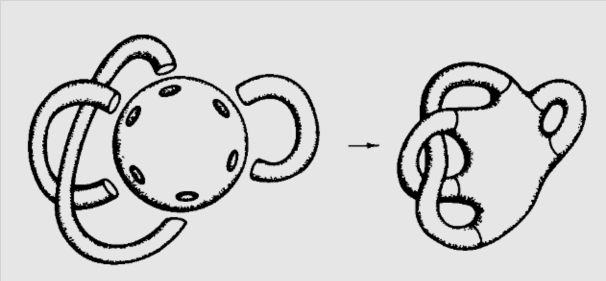
Järgmine konstruktsioon üldistab ülalpool kirjeldatud pindasid. Võtame ühiksfääri S^2 ja lõikame välja $2n$ (paaris arv) lahtist ketast (vt 15). Tekib 2-muutkond



Joonis 9: Toru otsade kokkukleepimine annab sõõriku.

rajaga, kusjuures selle muutkonna raja on ringjoonte ühend. Nüüd võtame ühe silindri, valime sfääril kaks ringjoont, mis on tekkinud ketaste väljalõikamisel, ja sfääri külge kleepime silindrit, samastades selle silindri raja ringjooni valitud ringjoontega sfääril. Kordame kirjeldatud protseduuri n korda. Konstrueeritud pinda nimetatakse sangadega sfääriks ja tähistatakse S^2_n. Arv n on sangadega sfääri liik.

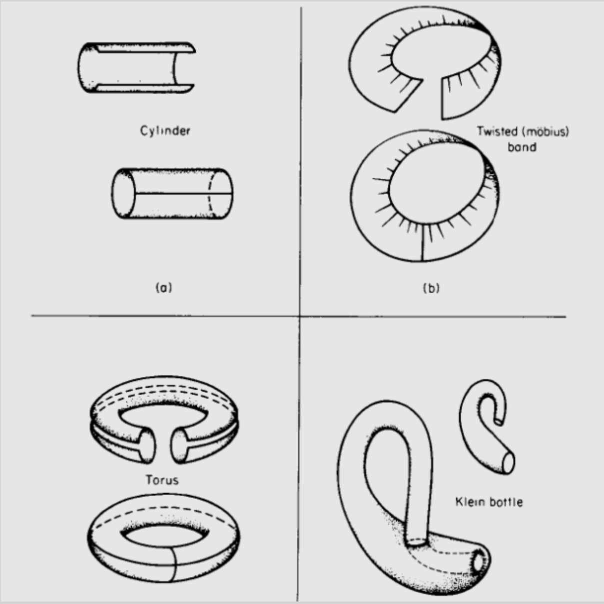
Kõik ülalpool vaadeldud 2-muutkonnad on eukleidilise ruumi $\mathbb{R}^3$ punktihulgad, st $S^2 \subset \mathbb{R}^3, T^2 \subset \mathbb{R}^3, S^2_n \subset \mathbb{R}^3$. Kui 2-muutkond asub kolmemõõtmelises ruumis, st ta on ruumi $\mathbb{R}^3$ punktihulk, siis on loomulik ta nimetada *pinnaks*. Juhime tähelepanu sellele, et topoloogilise muutkonna definitsioonis ei nõuta, et muutkond oleks mingi ruumi $\mathbb{R}^N$ punktihulk. Seega topoloogilise 2-muutkonna mõiste on üldisem, kui pinna mõiste. Selles mõttes võib öelda, et pind on topoloogilise 2-muutkonna erijuht. Kui 2-muutkond on konstrueeritud nii, et ta ei ole ruumi $\mathbb{R}^3$



Joonis 10: Sangadega sfäär

punktihulk (st muutkonna konstrueerimisel meie ei kasuta ruumi $\mathbb{R}^3$), siis tekib huvitav küsimus kas konstrueeritud muutkond on realiseeritav kolmemõõtmelises ruumis asuva pinna abil? Teiste sõnadega, kas leidub selline pind, et 2-muutkond on homöomorfne selle pinnaga. Kui see on võimalik, siis 2-muutkonda võib samastada vastava pinnaga ja edaspidi nimetada pinnaks. Ülalpool püstitatud küsimus on tähtis 2-muutkonna 3D visualiseerimiseks.

Muutkondade konstrueerimiseks sageli kasutatakse faktor-ruumi mõistet ja faktor-ruumi topoloogiat. Oletame, et tasandil $\mathbb{R}^2$ on antud ruut $D = [0,1] \times [0,1]$. Selle ruudu külgede punkte samastades, võime konstrueerida järgmiseid 2-muutkondasid: silinder, Möbiuse leht, toor, Kleini pudel (vt joonis 7). Juhime tähelepanu sellele, et Kleini pudel on korrektselt defineeritud 2-muutkond, kuid meie ei saa ta homöomorfselt sisestada ruumi $\mathbb{R}^3$, st Kleini pudelit ei ole võimalik esitada pinnana ruumis $\mathbb{R}^3$. Topoloogiliste muutkondade klassis on väga tähtis



Joonis 11: Silinder, Möbiuse leht, toor, Kleini pudel

orienteeritavate muutkondade alamklass. Orientatsiooni range definitsiooni anname hiljem ja selles punktis ainult seletame kvalitatiivselt, millist 2-muutkonda nimetatakse orienteeritavaks. Kui pinna igas punktis on määratud ühiknormaalvektor (ühikvektor, mis on risti pinna puutujatasandiga selles punktis) nii, et ühiknormaalvektor sõltub pidevalt pinna punktist, siis vastavat pinda nimetame orienteeritavaks. On ilmne, et sfäär, toor, silinder on orienteeritavad pinnad, kuid Möbiuse leht ei ole.

Topoloogiliste muutkondade teoorias tsentraalne probleem on muutkondade klassifitseerimine homöomorfismi täpsusega, st muutkonnad on ekvivalentsed, kui nad on homöomorfsed. Topoloogiliste muutkondade klassifitseerimiseks kasutatakse topologilisi invariante. Muutkonna topoloogiliseks invariandiks võib olla arv (Euleri karakteristik, Betti arvud), rühm (fundamentaalrühm, homotoopiarühm, homoloogia rühm, kohomoloogia rühm), polünoom (Jones'i sõlmede polünoomid, neljamõõtmeliste muutkondade Donaldsoni polünoomid). Arvu, rühma, polünoomi nimetatakse muutkonna topoloogiliseks invariandiks, kui homöomorfsete muutkondade korral vastavad arvud on võrdsed, rühmad on isomorfsed ja polünoomid on võrdsed. Kui õnnestub leida topoloogiliste invariantide komplekt selline, et igale homöomorfsete muutkondade klassile vastab üks ja ainult üks invariantide väärtuste komplekt, kusjuures erinevate klasside korral invariantide väärtuste komplektid on ka erinevad, siis klassifikatsioon on täielik.

Dimensioonis üks topoloogiliste muutkondade klassifikatsioon on üsna lihtne. Iga sidus, kompaktne 1-dimensionaalne muutkond on homöomorfne ringjoonega S^1. Kui loobuda muutkonna kompaktsusest, siis ta on homöomorfne $\mathbb{R}$. Järelikult kehtib

Teoreem 1.3.3. *Iga ühedimensionaalne sidus topoloogiline muutkond on homöomorfne kas ühikringjoonega* S^1 *(kui ta on kompaktne) või* $\mathbb{R}$ *(kui ta on mittekompaktne).*

Topoloogiliste muutkondade klassifitseerimine dimensioonis kaks on veidi keerulisem ja tugineb topoloogilisele invariandile. Kui topoloogiline 2-muutkond M on homöomorfne p sangaga sfääriga, siis arvu p nimetatakse muutkonna M liigiks (geenuseks) (*genus*). Osutub, et liik (geenus) on muutkonna topoloogiline invariant, st kui muutkonna M liik on p, muutkonna N liik on q ja muutkond M on homöomorfne muutkonnaga N, siis $p = q$. Vastupidi, kui $p \neq q$, siis muutkond M ei ole homöomorfne muutkonnaga N. Kehtib

Teoreem 1.3.4. *Iga kompaktne, sidus orienteeritav 2-muutkond on homöomorfne sangadega sfääriga ja selle sfääri sangade arvu nimetatakse topoloogilise muutkonna liigiks. Kui 2-muutkondade liigid on võrdsed, siis nad kuuluvad homöomorfsete muutkondade ühte klassi ja, vastupidi, kui liigid on erinevad, siis vastavate homöomorfsete muutkondade klasside ühisosa on tühi.*

Järelikult kui 2-muutkond on

- kompaktne,
- joonsidus,
- orienteeritav,

siis sellise muutkonna korral on määratud tema geenus ehk liik $p \geq 0$ ja geenus määrab selliste muutkondade täielikku klassifikatsiooni. On võimalik tõestada, et 2-muutkonna geenus on $p = 0$ parajasti siis, kui 2-muutkond on kompaktne ja ühelisidus. Mainime, et kompaktset ilma rajata muutkonda sageli nimetatakse kinniseks 2-muutkonnaks (*closed manifold*). Seega kehtib

Teoreem 1.3.5. *Kompaktne ühelisidus 2-muutkond on homöomorfne ühiksfääriga. (Every closed simply connected 2-manifold is homeomorphic to sphere S^2)*

Kui ei nõua, et oleks täidetud viimane tingimus (orienteeruvus), siis 2-muutkondade klass laieneb, ja sellise klassi klassifikatsioonis kasutatakse projektiivset tasandit, millest räägitakse järgmises punktis. Siin tuleb mainida, et muutkondade dimensiooniga $n \geq 3$ teooria on kaasaegse matemaatika üheks tsentraalseks valdkonnaks ja aktiivselt areneb, mis on põhjustatud sellega, et antud valdkond on tähtis rakendustes (teoreetilises füüsikas ja mehaanikas).

Lõpetuseks räägime Poincaré hüpoteesist. Prantsuse matemaatiku Henri Poincaré (1854 - 1912) hüpoteesi (1904) sõnastus on järgmine:

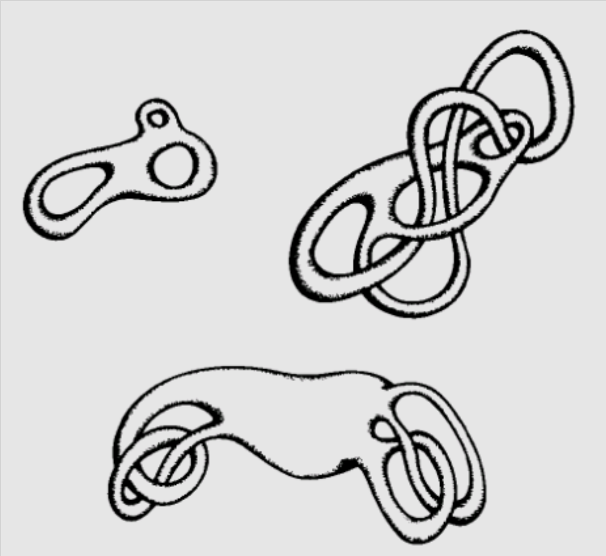
`Iga kompaktne ühelisidus kolmemõõtmeline topoloogiline muutkond on homöomorfne sfääriga` S^3. *Every closed simply connected 3-manifold is homeomorphic to sphere S^3*

Hiljem Poincaré hüpoteesiks hakkati nimetama ülalmainitud väidet suvalise $n \geq 3$ korral, s.t. iga kompaktne ühelisidus n-mõõtmeline topoloogiline muutkond on homöomorfne sfääriga S^n, $n \geq 3$. Poincaré probleemi uurimine näitas, et selle probleemi kolmemõõtmeline variant on kõige raskem. Poincaré probleem dimensioonis kolm oli lahendatud 2006. aastal ja see oli sensatsioon, millest kirjutati kõikides suurtes rahvusvahelistes ajalehtedes. Selle probleemi lahendusest ja G.

Perelmanist, kes lahendas Poincaré probleemi, kirjutatakse käesoleva peatüki viimases punktis.

1.4. Projektiivne ruum ja Grassmanni muutkond

Eelmistes punktides meie nägime, et topoloogilise muutkonna konstrueetrimise üheks meetodiks on võrrandite abil, nt sfäär. Selliste muutkondade klassi kuuluvad ka kõik teist järku pinnad ellipsoid, hüperboolne paraboloid, ühekatteline hüperboloid ja teised. Saab tõestada, et kui funktsioon $f : U \to \mathbb{R}$, kus $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ on funktsiooni määramispiirkond, on heade omadustega funktsioon, siis võrrandi $f(x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}) = c$, kus c on mingi reaalarv, lahendihulk ruumis $\mathbb{R}^{n+1}$ on topoloogiline n-muutkond, mida nimetatakse funktsiooni f tasemepinnaks või hüperpinnaks ruumis $\mathbb{R}^{n+1}$. Juhime tähelepanu sellele, et nii konstrueeritud muutkond on ruumi $\mathbb{R}^{n+1}$ alamhulk, st asub vastavas ruumis, sest meie algusest peale eeldame, et on antud eukleidiline ruum $\mathbb{R}^{n+1}$. Selle kohta öeldakse, et muutkond on sisestatud eukleidilisse ruumi (hiljem anname sisestamise ranget definitsiooni). Tasemepindade klass on üsna suur ja üliõpilastel sageli jääb mulje, et sellega on lugu lõpetatud. Tegelikult nii ei ole ja muutkondade klass on laiem. Muutkondasid võib konstrueerida ka teisiti, abstraktselt ilma oletuseta, et muutkond on eukleidilise ruumi mingi alamhulk. Kui muutkond on juba korrektselt konstrueeritud ja meie näitasime, et see on tõepoolest muutkond, siis järgmiseks sammuks võime proovida ta sisestada eukleidilisse ruumi, st realiseerida pinnana eukleidilises ruumis. Kuid siin tuleb arvestada, et saadud pinna ei tohi samastada muutkonnaga, kuna pind on muutkonna topoloogiline mudel ja selle mudeli ehitus sõltub sellest, mis moel me sisestame muutkonda



Joonis 12: Homöomorfsed või mitte?

eukleidilisse ruumi. Muutkonna kujutist ruumis $\mathbb{R}^3$ kasutatakse muutkonna visualiseerimiseks, kuid siin peame olema ettevaatlikud, kuna muutkonna kujutis ruumis $\mathbb{R}^3$ sõltub sellest, kuidas meie sisestame muutkonda $\mathbb{R}^3$ (mõnikord see ei ole isegi võimalik, nt Kleini pudeli või projektiivse ruumi korral) ja kujutised on mõnikord petlikud (vt joonis 8, kus muutkonnad on homöomorfsed, kuid joonisel paistab, et ei ole).

Abstrakse muutkonna konstrueerimiseks kasutame projektiivset ruumi. Projektiivse ruumi mõiste tekib projektiives geomeetrias, mis on omaette tähtis kaasaegses matemaatikas, mitte ainult projektiivse ruumi tõttu. Ajalooliselt projektiivse geomeetria rajaja oli prantsuse inseneer ja arhitekt Gérard Desargues (1591–1662), kes publitseeris 1639. aastal teost *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'une cone avec un* plan[1], kus pani alust projektiivsele geomeetriale. Raamatu lugemine oli üsna raske, kuna autor kasutas oma terminoloogiat, mille terminid suures osas olid võetud taimeteadusest. Teose tiraaž oli väike ja teos jäi tundmatuks tolleaegsetele matemaatikutele. Isegi kaks sajandit hiljem prantsuse matemaatik Michel Chasles, kes kirjutas monograafiat geomeetria arengust, mitte midagi ei kirjutanud G. Desargues'ist. Huvitav on see, et G. Desargues teose retsensent kritiseeris kasutatavat terminoloogiat ja oma kriitika objektiks valis sõna *involutsioon*, ja tänu tema kriitikale antud termin jäi matemaatikasse.

Projektiivse ruumi kirjeldust alustame ruumist $\mathbb{R}^{n+1}$. Võtame kasutusele tähistust $\mathbb{R}_0^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ (ruum eemaldatud alguspunktiga, *punctured space*). Kaks punkti $x, y \in \mathbb{R}_0^{n+1}$ nimetame ekvivalentseteks ja tähistame $x \sim y$, kui

[1]Proposed Draft of an Attempt to Deal with the Events of the Meeting of a Cone with a Plane

leidub reaalarv $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ nii, et

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}) \sim y = (y^1, y^2, \ldots, y^{n+1}) \Leftrightarrow x^i = t\, y^i. \tag{1.4.1}$$

Kui tingimus (1.4.1) on täidetud, siis lühidalt seda tähistame $x = t\, y$. Punkti $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ekvivalentsiklassi tähistame $[x]$.

Definitsioon 1.4.1. Ekvivalentsiklasside hulka $\{[x] : x \in \mathbb{R}_0^{n+1}\}$ nimetatakse n-mõõtmeliseks *projektiivseks ruumiks* ja tähistatakse $P^n(\mathbb{R})$, st

$$P^n(\mathbb{R}) = \{[x] : x \in \mathbb{R}_0^{n+1}\}. \quad \blacktriangle$$

Ekvivalentsiklassi $[x]$ nimetatakse projektiivse ruumi punktiks.

Kujutust $\pi : \mathbb{R}_0^{n+1} \to P^n(\mathbb{R})$ (nimetatakse projektsiooniks) määrame valemiga $\pi(x) = [x]$. Projektiivne ruum muutub topoloogiliseks ruumiks, kui topoloogiat määrame järgmiselt: hulka $U \subset P^n(\mathbb{R})$ nimetame lahtiseks hulgaks, kui $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}_0^{n+1}$ on lahtine hulk ruumi $\mathbb{R}^{n+1}$ topoloogias (projektiivse ruumi topoloogiat üldises topoloogias nimetatakse faktorruumi topoloogiaks).

Lause 1.4.2. *Projektiivne ruum $P^n(\mathbb{R})$ on joonsidus ja kompaktne topoloogiline n-muutkond.*

Tõestus. Faktorruumi topoloogia omadustest järeldub, et definitsiooni 1.2.1 esimesed tingimused on täidetud. Seega, jääb näidata, et $P^n(\mathbb{R})$ on lokaalselt eukleidiline, sidus ja kompaktne. Lokaalselt eukleidilise struktuuri näitamiseks, konstrueerime atlase. Olgu

$$U_i = \{[x] \in P^n(\mathbb{R}) : x = (x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^{n+1}), x^i \neq 0\} \subset P^n(\mathbb{R}).$$

On ilmne, et U_i definitsioon on korrektne. Tõepoolest, kui $[x]$ on selline, et punkti x i-s koordinaat on nullist erinev, siis ka selle ekvivalentsiklassi teise suvalise punkti korral see tingimus on täidetud. Defintsioonist järeldub, et U_i on $P^n(\mathbb{R})$ lahtine alamhulk suvalise $i = 1, 2, \ldots, n+1$ korral, kusjuures $\{U_i\}_{i=1}^{n+1}$ on projektiivse ruumi kate, st

$$P^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$$

Defineerime $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ järgmiselt:

$$\phi_i([x]) = (\frac{x^1}{x^i}, \frac{x^2}{x^i} \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i}) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4.2}$$

Kujutuse definitsioon on korrektne, kuna, kui $y = (y^1, y^2, \ldots, y^{n+1}) \in [x]$ on sama klassi teine punkt, siis leidub reaalarv $t \neq 0$ selline, et $y^i = t\, x^i$ ning

$$\begin{aligned}
\phi_i([y]) &= (\frac{y^1}{y^i}, \frac{y^2}{y^i} \ldots, \frac{y^{i-1}}{y^i}, \frac{y^{i+1}}{y^i}, \ldots, \frac{y^{n+1}}{y^i}) \\
&= (\frac{t\, x^1}{t\, x^i}, \frac{t\, x^2}{t\, x^i} \ldots, \frac{t\, x^{i-1}}{t\, x^i}, \frac{t\, x^{i+1}}{t\, x^i}, \ldots, \frac{t\, x^{n+1}}{t\, x^i}) \\
&= (\frac{x^1}{x^i}, \frac{x^2}{x^i} \ldots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^i}),
\end{aligned}$$

st $\phi_i([x])$ kujutis ruumis $\mathbb{R}^n$ ei sõltu klassi $[x]$ esindaja valikust. On lihtne näidata, et ϕ_i on bijektsioon, st peale kujutus ja injektsioon. Kui $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ on $\mathbb{R}^n$ suvaline punkt, siis

$$\phi_i([x']) = x, \quad x' = (x^1, x^2, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}_0^{n+1}.$$

Järelikult, ϕ_i on peale kujutus. Oletame, et $[x], [y] \in U_i$, $[x] \neq [y]$, kuid $\phi_i([x]) = \phi_i([y]) = z \in \mathbb{R}^n$. Viimasest järeldub, et

$$z^1 = \frac{x^1}{x^i} = \frac{y^1}{y^i},\ z^2 = \frac{x^2}{x^i} = \frac{y^2}{y^i}, \ldots, z^{i-1} = \frac{x^{i-1}}{x^i} = \frac{y^{i-1}}{y^i},$$

$$z^i = \frac{x^{i+1}}{x^i} = \frac{y^{i+1}}{y^i},\ \ldots, z^n = \frac{x^{n+1}}{x^i} = \frac{y^{n+1}}{y^i},$$

ja seega

$$y^k = \frac{y^i}{x^i} x^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Viimane valem näitab, et $[x] = [y]$, mis on vastuolus oletusega. Järelikult ϕ_i on injektiivne ja seega ϕ_i on bijektsioon. Definitsiooni kohaselt,

$$\phi_i([x]) = (\phi_i^1([x]), \phi_i^2([x]), \ldots, \phi_i^n([x])),$$

kus

$$\phi_i^1([x]) = \frac{x^1}{x^i},\ \ldots \phi_i^{i-1}([x]) = \frac{x^{i-1}}{x^i},\ \phi_i^i([x]) = \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots, \phi_i^1([x]) = \frac{x^{n+1}}{x^i},$$

ja kujutuse ϕ_i iga komponent ϕ_i^k on pidev funktsioon. Seega ϕ_i on pidev kujutus ja analoogiliselt näitame, et pöördkujutus ϕ_i^{-1} on pidev. Järelikult, ϕ_i on homoöomorfism ja $P^n(\mathbb{R})$ on topoloogiline muutkond atlasega $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^{n+1}$.

Kui kujutust π ahendame ühiksfäärile $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, siis kujutus $\pi : S^n \to P^n(\mathbb{R})$ on pidev ja peale kujutus. Tõepoolest, suvalise punkti $[x] \in P^n(\mathbb{R})$ korral kehtib

$$\pi^{-1}([x]) = \{-\frac{x}{||x||}, \frac{x}{||x||}\}, -\frac{x}{||x||}, \frac{x}{||x||} \in S^n.$$

Kuna ühiksfäär on kompaktne ja sidus topoloogiline ruum, projektiivne ruum, kui ühiksfääri pidev kujutis, ka sidus ja kompaktne. Sellega lõpeb tõestus. ▲

Juhime tähelepanu sellele, et kasutades ruumi $\mathbb{R}^{n+1}$ vektorruumi struktuuri, meie võime projektiivset ruumi $P^n(\mathbb{R})$ kirjeldada ka järgmiselt: olgu $\mathbf{x}$ ruumi $\mathbb{R}^{n+1}$ nullvektorist erinev vektor ja $[\mathbf{x}]$ vektori $\mathbf{x}$ poolt tekitatud ühedimensionaalne alamruum, st $[\mathbf{x}] = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{y} = t\,\mathbf{x}, t \in \mathbb{R}\}$. Järelikult, võime öelda, et projektiivne ruum $P^n(\mathbb{R})$ on vektorruumi $\mathbb{R}^{n+1}$ ühedimensionaalsete alamruumide hulk. Samaväärselt, kasutades ruumi $\mathbb{R}^{n+1}$ afiinse ruumi struktuuri, võime öelda, et projektiivne ruum $P^n(\mathbb{R})$ on alguspunkti läbivate sirgete hulk. Sellises lähenemises projektiivse ruumi topoloogiat saab kirjeldada piltlikult: kui $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ on lahtine hulk, siis alguspunkti läbivate sirgete hulk, mille iga sirge l rahuldab tingimust $l \bigcap U \neq \emptyset$, on lahtine hulk projektiivses ruumis.

Uurime projektiivse tasandi geomeetrilist struktuuri. Projektiivse tasandi tähistus on P^2. Projektiivse tasandi punkt on kolmemõõtmelise ruumi $\mathbb{R}^3$ sirge, mis läbib alguspunkti. Olgu alguspunkt tähistatud O. Sirged, mis läbivad alguspunkti, moodustavad sirgekimbu $\mathcal{K}_O$ punktis O. Olgu $\mathfrak{T}$ tasand, mis ei läbi punkti O. Kõik sirgekimbu $\mathcal{K}_O$ sirged jagunevad kaheks klassiks: ühes klassis on sirged, mis lõikavad tasandit $\mathfrak{T}$ ja teises on sirged, mis on paralleelsed tasandiga $\mathfrak{T}$. Kui sirge lõikab tasandit, siis ainult ühes punktis ja vastavat lõikepunkti samastame projektiivse tasandi punktiga. On ilmne, et tasandi $\mathfrak{T}$ igale punktile vastab üks sirge, mis lõikab tasandit selles punktis. Seega projektiivse tasandi P^2 punktide üks klass on samastatud hariliku tasandi $\mathfrak{T}$ punktidega. Kuid projektiivse tasandi need punktid, mis on määratud tasandiga $\mathfrak{T}$ paralleelsete sirgetega, ei ole esitatud punktidega. Selle probleemi lahendamiseks, täiendame harilikut tasandit $\mathfrak{T}$ lisapunktidega. Kui $L \in \mathcal{K}_O$ on sirge, mis on paralleelne tasandiga $\mathfrak{T}$, siis ütleme, et sirge L määrab tasandi $\mathfrak{T}$ *ebapunkti* või *lõpmata kauge punkti* A_L, kusjuures sirge L lõikab tasandit $\mathfrak{T}$ vastavas ebapunktis A_L. Postuleerime, et tasandi $\mathfrak{T}$ ebapunktid moodustavad *ebasirge* või *lõpmata kauge sirge* l_∞, st $A_L \in l_\infty$. Tasandit $\mathfrak{T}$, mis on täiendatud ebapunktiga ja ebasirgega, nimetatakse projektiivseks tasandiks (tähistame nagu enne P^2). Tasand $\mathfrak{T}'$, mis läbib punkti O ja ei ole paralleelne tasandiga $\mathfrak{T}$, lõikab tasandit $\mathfrak{T}$ ja lõikejooneks on sirge. On ilmne, et leidub üks ja ainult üks sirge, mis läbib punkti O ja on paralleelne tasandite $\mathfrak{T}'$ ja $\mathfrak{T}$ lõikesirgega. Seega projektiivse tasandi sirget võime samastada kolmemõõtmelise ruumi tasandiga ja see on üks-ühene vastavus. Mainime, et ebasirget samastame tasandiga, mis on paralleelne tasandiga $\mathfrak{T}$. *Projektiivsel tasandil suvalist kaks sirget lõikuvad.* Tõepoolest kui sirged ei ole paralleelsed, siis nad lõikuvad harilikul tasandil. Kui sirged on paralleelsed, siis nad lõikuvad ebapunktis A_L. Siin me näeme, et geomeetria tähtis mõiste *intsidentsus* ehk *kuuluvus* muutuub sümmeetriliseks projektiivsel tasandil. Kui punkt A asub sirgel l ja sirge l läbib vastavat punkti, siis ütleme, et punkt A on intsidentne sirgega l (sirge l on intsidentne punktiga A). Projektiivsel tasandil kehtib

Lause 1.4.3. *Kui A, B on projektiivse tasandi suvalised erinevad punktid, siis leidub üks ja ainult üks sirge l, millega nad on mõlemad intsidentsed. Kui l_1, l_2 on tasandi suvalised erinevad sirged, siis leidub üks ja ajnult üks punkt, millega nad on mõlemad intsidentsed.*

Mainime, et ülalpool sõmastatud väide ei kehti harilikul eukleidilisel tasandil. See väide demontstreerib projektiivse tasandi (ruumi) duaalsuse printsiipi: *kui projektiives geomeetrias kehtib mingi väide punktide ja sirgete kohta, siis kehtib* *ka duaalne väide, kus sõna "punktön asendatud sõnaga "sirge"ja vastupidi.*

Konstrueerime projektiivse tasandi topoloogilise mudeli. Selleks vaatleme ühiksfääri S^2. Sirgekimbu $\mathcal{K}_O$ iga sirge L lõikab ühiksfääri kahes punktis, mida nimetatakse antipoodideks. Seega projektiivne tasand on homöomorfne ühiksfääriga, kus antipoodid on samastatud $P^2 \simeq S^2/\sim$. Nüüd võtame kinnise poolsfääri. On ilmne, et projektiivne tasand on homöomorfne kinnise poolsfääriga, kusjuures raja antipoodid on samastatud. Kui poolsfääri projekteerime ekvaatori tasandile, siis projektiivne tasand on homöomorfne kinnise ketaga, kusjuures ringjoone antipoodid on samastatud $P^2 \simeq D/\sim$.

Käesoleva punkti järgmiseks mõisteks on Grassmanni muutkond. Grassmanni muutkond on projektiivse ruumi üldistus. Olgu L vektorruumi $\mathbb{R}^n$ k-mõõtmeline alamruum ($k < n$) ja ruumi $\mathbb{R}^n$ kõikide k-mõõtmeliste alamruumide hulka tähistame $G^{k,n}(\mathbb{R})$, st

$$G^{k,n}(\mathbb{R}) = \{\text{ruumi } \mathbb{R}^n\ k - \text{mõõtmeliste alamruumide hulk },k < n\}.$$

Erijuhul, kui $k = 1$ hulk $G^{1,n}(\mathbb{R})$ on projektiivne ruum, st $G^{1,n}(\mathbb{R}) = P^{n-1}(\mathbb{R})$.

Lause 1.4.4. *Hulk $G^{k,n}(\mathbb{R})$ on sidus, kompaktne topoloogiline muutkond, mille dimensioon on $k(n-k)$, st*

$$dim\, G^{k,n}(\mathbb{R}) = k(n-k).$$

Definitsioon 1.4.5. Muutkonda $G^{k,n}(\mathbb{R})$ nimetatakse Grassmanni muutkonnaks (*Grassmann manifold*).

Lause 1.4.4 tõestus on analoogiline projektiivse ruumi korral antud tõestusega (vt Lause 1.4.2). Meie näitame ainult tõestuse skeemi. Olgu $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ $k \times n$ ristkülikmaatriksite hulk. Kui suvalist maatriksit sellest hulgast samastada ruumi $\mathbb{R}^{k\,n}$ vektoriga, siis $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ muutub topoloogiliseks ruumiks. Olgu A reaalarvuline $k \times n$ ristkülikmaatriks astakuga k, st rank $A = k$, ja selliste kõikide maatriksite hulka tähistame $\mathrm{rank}_k \mathit{maatriksid}$. Kehtib $\mathrm{rank}_k \mathit{maatriksid} \subset \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$. On võimalik näidata, et $\mathrm{rank}_k \mathit{maatriksid}$ on topoloogilise ruumi $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ lahtine alamhulk ja seega ka topoloogiline ruum alamruumi topoloogiaga. Olgu $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ maatriksi A reavektorid ja $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k]$ vastavate vektorite lineaarkate ehk vektorite poolt tekitatud ruumi $\mathbb{R}^n$ k-mõõtmeline alamruum. Kujutust $\pi : \mathrm{rank}_k \mathit{maatriksid} \to G^{k,n}(\mathbb{R})$ määrame valemiga

$$\pi(A) = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k].$$

Kui $G \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ (regulaarsete k-ndat järku ruutmaatriksite rühm), siis kehtib $\pi(G\,A) = \pi(A)$ suvalise $A \in \mathrm{rank}_k \mathit{maatriksid}$ korral. Selle kujutuse abil hulgal $G^{k,n}(\mathbb{R})$ määrame topoloogiat järgmiselt: ütleme, et $U \subset G^{k,n}(\mathbb{R})$ on lahtine, kui selle hulga originaal $\pi^{-1}(U) \subset \mathrm{rank}_k \mathit{maatriksid}$ on lahtine. Saab näidata, et nii defineeritud topoloogias $G^{k,n}(\mathbb{R})$ on loenduva baasiga Hausdorfi kompaktne ja sidus ruum. Seega, jääb näidata, et Grassmanni muutkond on lokaalselt eukleidiline ruum.

Olgu $A \in \mathrm{rank}_k \mathit{maatriksid}$ ja $A_1, A_2, \ldots, A_N$ maatriksi A kõik k-ndat järku alammaatriksid, mis on kuidagi järjestatud. Kuna maatriksi astak on k, alati leidub vähemalt üks alammaatriks A_l, kus $1 \le l \le N$, selline, et $\det(A_l) \neq 0$. Saab näidata, et alati leidub permutatsiooni maatriks P_l nii, et

$$A\,P_l = (A_l\ \tilde{A}_l),$$

kus $A\,P_l$ on maatriksite korrutis ja $\tilde{A}_l$ on maatriksi A $k \times (n-k)$ alammaatriks. Olgu

$$U_l = \{L \in G^{k,n}(\mathbb{R}) : L = \pi(A), A \in \mathrm{rank}_k maatriksid, \det{(A_l)} \neq 0\}.$$

Kuna determinant on pidev funktsioon, siis tingimus $\det \neq 0$ määrab lahtist hulka. Seega $U_l \subset G^{k,n}(\mathbb{R})$ on lahtine hulk ja $\bigcup_l U_l = G^{k,n}(\mathbb{R})$ (hulkade U_l kogum on Grassmanni muutkonna lahtine kate). Defineerime kujutust

$$\phi_l(\pi(A)) = (b_1, b_2, \dots, b_{k\,(n-k)}) \in \mathbb{R}^{k\,(n-k)},$$

kus b_i on kuidagi järjestatud $k \times (n-k)$ matriksi $A^{-1}\,\tilde{A}_l$ elemendid.

1.5. Fundamentaalrühm ja Euleri karakteristik

Topoloogilise muutkonna tähtsaks karakteristikuks on tema *fundamentaalrühm*.

Definitsioon 1.5.1. Pidevat kujutust $\varphi : [0,1] \to \mathfrak{X}^n$, kus $\mathfrak{X}^n$ on n-mõõtmeline topoloogiline muutkond, nimetatakse parameetriliseks jooneks, mis ühendab selle muutkonna punktid $\varphi(0)$ ja $\varphi(1)$.

Juhul kui $\varphi(0) = \varphi(1)$ parameetrilist joont φ nimetatakse *kinniseks jooneks* ehk *silmuseks*. Öeldakse, et topoloogiline muutkond $\mathfrak{X}^n$ on *joonsidus*, kui suvaliste punktide p, q korral leidub parameetriline joon φ selline, et $\varphi(0) = p,\ \varphi(1) = q$.

Definitsioon 1.5.2. Olgu $\varphi,\ \psi$ muutkonna $\mathfrak{X}^n$ parameetrilised jooned alguspunktiga punktis p ja lõpp-punktiga punktis q, st $\varphi(0) = \psi(0) = p$ ja $\varphi(1) =$

$\psi(1)=q$. Parameetrilised jooned φ, ψ on *homotoopsed*, kui leidub pidev kujutus

$$H:[0,1]\times[0,1]\to\mathfrak{X}^n$$

selline, et

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \varphi(t), \qquad H(t,1)=\psi(t),\\ H(0,s) &= p, \qquad\quad H(1,s)=q, \end{aligned}$$

kus $0\le t\le 1,\ 0\le s\le 1$.

Kui φ ja ψ on homotoopsed jooned, siis kirjutame $\varphi\sim\psi$. Definitsioonist järeldub, et parameetrilised jooned on homotoopsed, kui leidub parameetriliste joonte üheparameetriline pidev parv selline, et antud parameetrilised jooned on selle parve elemendid. Olgu p muutkonna $\mathfrak{X}^n$ mingi punkt ja $S_p\mathfrak{X}^n$ silmuste hulk punktis p, s.t. selle hulga element φ on parameetriline joon $\varphi:[0,1]\to\mathfrak{X}^n$ selline, et $\varphi(0)=\varphi(1)=p$. On ilmne, et parameetriliste joonte homotoopia määrab ekvivalentsiseost silmuste hulgal $S_p\mathfrak{X}^n$. Silmuse $\varphi\in S_p\mathfrak{X}^n$ poolt määratud ekvivalentsiklassi, kuhu kuuluvad kõik temaga homotoopsed silmused, tähistame $[\varphi]$ ja ekvivalentsiklasside hulka tähistame $\pi_1(\mathfrak{X}^n,p)$. Ekvivalentsiklasside korrutise anname valemiga

$$[\varphi]\cdot[\psi]=[\varphi*\psi],$$

kus

$$\varphi*\psi\,(t)=\begin{cases}\varphi(2\,t), & \text{kui}\quad 0\le t\le\frac12\\ \psi(2\,t-1), & \text{kui}\quad \frac12\le t\le 1.\end{cases}$$

Ekvivalentsiklasside korrutamine määrab hulgal $\pi_1(\mathcal{X}^n, p)$ rühma struktuuri (assotsiatiivsus, ühikelement, pöördelement). Selle rühma ühikelemendiks on $[\varepsilon_p]$, kus $\varepsilon_p(t) = p$, $\forall t \in [0,1]$. Ühikelemendi tähistame $[\varepsilon_p] = \mathbf{1}_p$.

Definitsioon 1.5.3. $\pi_1(\mathcal{X}^n, p)$ nimetatakse muutkonna $\mathcal{X}^n$ fundamentaalrühmaks punktis p.

Kui topoloogiline muutkond on joonsidus, siis muutkonna fundamentaalrühm $\pi_1(\mathcal{X}^n, p)$ ei sõltu punktist p, st kui p, q on joonsidusa muutkonna $\mathcal{X}^n$ erinevad punktid, siis $\pi_1(\mathcal{X}^n, p) \simeq \pi_1(\mathcal{X}^n, q)$ (isomorfsed rühmad). Järgnevas eeldame, et muutkond $\mathcal{X}^n$ on joonsidus ja selle muutkonna fundamentaalrühma tähistame lihtsalt $\pi_1(\mathcal{X}^n)$.

Fundamentaalrühma tähtsad omadused on järgmised:

1. *kui topoloogilised muutkonnad $\mathcal{X}^n$ ja $\mathcal{Y}^n$ on homöomorfsed, siis nende fundamentaalrühmad $\pi_1(\mathcal{X}^n)$ ja $\pi_1(\mathcal{Y}^n)$ on isomorfsed ehk*

$$\mathcal{X}^n \cong \mathcal{Y}^n \;\Rightarrow\; \pi_1(\mathcal{X}^n) \simeq \pi_1(\mathcal{Y}^n);$$

2. $\pi_1(\mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^m) \simeq \pi_1(\mathcal{X}^n) \times \pi_1(\mathcal{Y}^m)$.

3. topoloogiline muutkond on ühelisidus parajasti siis, kui tema fundamentaalrühm on triviaalne, st koosneb ainult ühikelemendist.

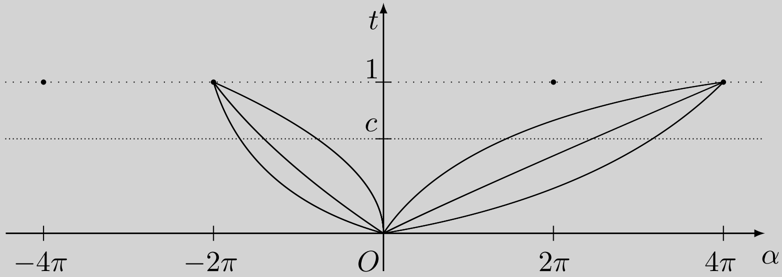
Leiame ühikringjoone S^1 fundamentaalrühma $\pi_1(S^1)$. Meenutame, et ühikringjoon on joonsidus kompaktne ühemõõtmeline muutkond. Ringjoon on määratud võrrandiga $x^2 + y^2 = 1$, kus x, y on tasandi ristkoordinaadid. Olgu A ringjoone punkt koordinaatidega $(1,0)$ ja $\psi : [0,1] \to S^1$ mingi silmus selles punktis, s.t. $\psi(0) = \psi(1) = A$. Olgu $\vec{r}(t)$ ringjoone punkti $\psi(t)$ kohavektor. On ilmne, et $\vec{r}(t)$ on ühikvektor suvalise $t \in [0,1]$ korral. Kui $t = 0$, siis $\vec{r}(0)$ on punkti A kohavektor ja asub x-teljel. Kui parameetrit t interpreteerida kui aega, mis muutub nullist üheni, siis vektorfunktsioon $\vec{r}(t)$ määrab kohavektori liikumist tasandil ja see on kohavektori pöörlemine ümber alguspunkti. Kohavektori pöörlemine ümber alguspunkti määrab vastavat pöördenurka, mida mõõdetakse kohavektori algasendist $\vec{r}(0)$ (ajahetkel $t = 0$ ta asetseb x-teljel) ja loetakse positiivseks (negatiivseks), kui kohavektor pöörleb vastupäeva (päripäeva). Pöördenurk α sõltub ajast t ja $\alpha(t)$ on pidev funktsioon. Funktsiooni $\alpha(t)$ graafik tasandil koordinaatidega t, α on pidev joon järgmiste omadustega:

- graafiku joon algab punktis $(0,0)$,
- graafiku joon lõpeb punktis $(1, 2\pi k)$, kus k on täisarv,
- graafiku joon lõikab α-teljega paralleelset sirget $t = c,\ 0 \le c \le 1$ ainult ühes punktis.

Kehtib väide: kui silmuste ψ, ψ' poolt määratud pöördenurga funktsiooni graafikud lõpevad (t,α)-tasandi ühes ja samas punktis, siis silmused ψ, ψ' on homotoopsed. Arvestades, et graafikud alati lõpevad punktides $(1, 2\pi k)$, kus k on täisarv, näeme, et igale klassile $[\psi] \in \pi_1(S^1, A)$ vastab üheselt määratud täisarv k ja kujutus $[\psi] \to k$ on bijektiivne vastavus $\pi_1(S^1, A)$ ja täisarvude hulga $\mathbb{Z}$ vahel. Kui homotoopsete silmuste klassile $[\psi]$ vastab täisarv k ja klassile $[\varphi]$ täisarv l, siis klasside korrutisele $[\psi] \cdot [\varphi]$ vastab täisarv $k + l$, s.t.

$$[\psi] \to k,\ \ [\varphi] \to l \implies [\psi] \cdot [\varphi] \to k + l.$$

Järelikult ringjoone fundamentaalrühm on isomorfne täisarvude aditiivse rühmaga $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.



Joonis 2.

Arvestades fundamentaalrühma omadust 2 jõuame järeldusele, et kahemõõtmelise toori fundamentaalrühm on isomorfne otsekorrutisega $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, s.t. $\pi_1(T^2) \simeq \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. Kui p on kahemõõtmelise sfääri suvaline punkt ja $\psi : [0,1] \to S^2$ on mingi silmus punktis p, siis ψ on alati võimalik pideva deformatsiooniga sfääri pinnal kokku tõmmata punktiks p. Järelikult kahemõõtmelise sfääri fundamentaalrühm on triviaalne, s.t. koosneb ainult ühikelemendist. Projektiivse tasandi fundamentaalrühm on isomorfne jäägiklasside (mod 2) rühmaga $\mathbf{Z}_2$, s.t. $\pi_1(RP^2) \simeq \mathbf{Z}_2$. Andmed ülalpool mainitud muutkondade fundamentaalrühmade kohta on koondatud järgmisse tabelisse

Muutkond $\mathcal{X}^n$	Fundamentaalrühm $\pi_1(\mathcal{X}^n, p)$
ringjoon S^1	$\mathbf{Z}$
2-sfäär S^2	$\mathbf{1}_p$
2-toor T^2	$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$
projektiivne tasand RP^2	$\mathbf{Z}_2$

Definitsioon 1.5.4. Kui topoloogiline muutkond $\mathcal{X}^n$ on lineaarselt sidus ja selle muutkonna fundamentaalrühm on triviaalne, s.t. fundamentaalrühm koosneb ainult ühikelemendist ehk suvalise punkti $p \in \mathcal{X}^n$ korral $\pi_1(\mathcal{X}^n, p) = \mathbf{1}_p$, siis muutkonna $\mathcal{X}^n$ nimetatakse ühelisiduseks muutkonnaks (simply connected manifold).

Tabelist järeldub, et kahemõõtmeline sfäär on ühelisidus muutkond. Arvestades ka seda, et kahemõõtmeline sfäär on kompaktne muutkond (tõkestatud ja kinnine ruumi $\mathbf{R}^3$ alamhulk) võime öelda, et *kahemõõtmeline sfäär S^2 on kompaktne ühelisidus topoloogiline muutkond.* Osutub, et samasugune väide kehtib ka kõrgemate dimensioonide puhul, s.t.

n-mõõtmeline sfäär S^n, $n \geq 2$ on kompaktne ühelisidus topoloogiline muutkond.

Proovime ettekujutada, kuivõrd tugevadeks kitsenduseks muutkonna kujule on kompaktsuse ja ühelisidususe tingimus. Kõige lihtsam on see 2-mõõtmelise muutkonna puhul, sest me saame toetuda oma geomeetrilisele intuitsioonile. Kujutame endale ette pinda, mis on paigutatud lõpliku pikkusega servadega kuupi (kompaktsus) ja suvalist silmust sellel pinnal saab kokku suruda punktiks pideva deformatsiooni abil (ühelisidusus). Geomeetriline intuitsioon ütleb, et selline pind peab olema topoloogiliselt ekvivalentne (homöomorfne) sfääriga. Tõepoolest, on võimalik näidata, et kehtib järgmine teoreem:

Teoreem 1.5.5. *Kui kahemõõtmeline topoloogiline muutkond $\mathfrak{X}$ on kompaktne ja ühelisidus, siis ta on homöomorfne 2-sfääriga S^2.*

Lühidalt näitame, milline on Teoreemi 2 tõestuse skeem. Osutub, et kehtib järgmine teoreem ([1]):

Teoreem 1.5.6. *Suvaline kahemõõtmeline kompaktne lineaarselt sidus topoloogiline muutkond on homöomorfne ühega järgmistest muutkondadest:*

$$\begin{aligned} S^2\sharp\, m\,T^2 &= S^2\sharp T^2\sharp T^2\sharp\ldots\sharp T^2 \quad (m \text{ korda } T^2)\ \ m\geq 0, \\ S^2\sharp\, n\,RP^2 &= S^2\sharp RP^2\sharp RP^2\sharp\ldots\sharp RP^2 \quad (n \text{ korda } RP^2)\ \ n\geq 1, \end{aligned}$$

kus $\sharp$ on topoloogiliste muutkondade sidus summa.

On võimalik näidata, et

$$\pi_1(S^2\,\sharp\, m\,T^2) \simeq \mathbf{Z}^{2m}, \tag{1.5.1}$$

$$\pi_1(S^2\,\sharp\, n\,RP^2) \simeq \mathbf{Z}^{n-1}\times\mathbf{Z}_2, \tag{1.5.2}$$

kus $m\geq 0,\ n\geq 1$. Valemites (1.5.1),(1.5.2) kõik fundamentaalrühmad on erinevad. Nüüd Teoreemist 3 ja valemitest (1.5.1),(1.5.2) järeldub, et kahemõõtmeline kompaktne lineaarselt sidus topoloogiline muutkond $\mathcal{X}$ on üheselt (homöomorfismi täpsusega) määratud oma fundamentaalrühmaga. Teiste sõnadega, kui muutkonna $\mathcal{X}$ fundamentaalrühm on leitud (ta peab olema isomorfne valemites (1.5.1),(1.5.2) esitatud rühmade ühe rühmaga), siis muutkond $\mathcal{X}$ on homöomorfne valemites (1.5.1),(1.5.2) esitatud muutkondade vastava muutkonnaga. Näiteks, kui kompaktne lineaarselt sidus kahemõõtmeline topoloogiline muutkond $\mathcal{X}$ on ühelisidus, s.t. tema fundamentaalrühm on triviaalne ehk $\pi_1(\mathcal{X}) = \mathbf{1}$, siis valemist (1.5.1) järeldub, et ta on homöomorfne sfääriga S^2 $(m = 0)$. Sellega Teoreem 2 on tõestatud.

1.6. Poincaré hüpotees

Prantsuse matemaatiku Henri Poincaré poolt 1904 aastal välja pakutud hüpotees seisnes selles, et Teoreemi 2 väide kehtib ka kolmemõõtmelise kompaktse ühelisiduse topoloogilise muutkonna puhul. Seega H. Poincaré hüpoteesi on võimalik sõnastada järgmiselt:

H. Poincaré hüpotees: **iga kompaktne ühelisidus kolmemõõtmeline topoloogiline muutkond on homöomorfne sfääriga $\mathbf{S^3}$.**

Hiljem Poincaré hüpoteesiks hakkati nimetama ülalmainitud väidet suvalise $n \geq 3$ korral, s.t. iga kompaktne ühelisidus n-mõõtmeline topoloogiline muutkond on homöomorfne sfääriga S^n, $n \geq 3$. Poincaré probleemi edaspidised uuringud näitasid, et selle probleemi kolmemõõtmeline variant on kõige raskem ja ta on tänasepäevani ei ole tõestatud.

Möödunud sajandi viiekümnendate aastate lõpus ja kuuekümnendate algul saavutati olulist edu kompaktsete ühelisiduste muutkondade uurimisel, mis näitas, et kõrgemate ($n \geq 5$) dimensioonidega muutkondade uurimine on märksa lihtsam, kui juhul $n = 3$ või $n = 4$. Siin pole midagi müstilist ja seletub see asjaoluga, et üldiselt mingi muutkonna fundamentaalrühm on moodustajate poolt tekitatud rühm, kusjuures rühma struktuur on määratud seostega moodustajate vahel. Need seosed konstrueeritakse kahemõõtmelise ketta $D = \{p = (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ pidevate kujutustega antud muutkonda. Ketase kujutised muutkonnas peavad olema üldise paiknemisega. Dimensioonide 5 ja kõrgem korral on meil piisavalt vabadust, et paigutada ketase kujutised nii, et nad ei lõikuks. Näiteks kolmemõõtmelises ruumis kaks üldise paiknemisega sirget ei lõiku (kiivsirged). Paralleelsed või lõikuvad sirged ei ole üldise paiknemisega. Samal ajal üldise paiknemisega tasand ja sirge kolmemõõtmelises ruumis lõikuvad alati, tasandiga paralleelne sirge pole üldise paiknemisega. Dimensioonide 3 ja 4 puhul vabadusaste aheneb, meil pole enam võimalust eraldada üldise paiknemisega kettasid nii, et nad ei lõikuks ning see toob kaasa keerulise struktuuriga fundamentaalrühmad.

Möödunud sajandi kuuekümnendate aastate algusel S. Smale avaldas Poincaré hüpoteesi tõestuse kõrgemate dimensioonide ($n \geq 5$) puhul ([2]). Varsti peale seda tõestas ka J. Stallings Poincaré hüpoteesi kõrgemate dimensioonide puhul ([3]), kusjuures J. Stallingsi tõestus tugines S. Smale'i meetoditest erinevatele meetoditele.

Hiljem selgus, et meetodeid, mida kasutasid S. Smale ja J. Stallings Poincaré hüpoteesi tõestamiseks kõrgemate dimensioonide puhul, ei saa rakendada neljamõõtmelise Poincaré probleemi lahendamiseks. Kakskümmend aastat hiljem seda, kui S. Smale ja J. Stallings lahendasid Poincaré probleemi kõrgemate dimensioonide puhul, s.t. 1981 aastal, ameerika matemaatik M. Freedman sõnastas ja tõestas teoreemi, mis sisaldas neljamõõtmeliste kompaktsete ühelisiduste topoloogiliste muutkondade täieliku klassifikatsiooni ([4]). Selle klassifikatsiooni abil on juba lihtne tõestada Poincaré hüpoteesi neljamõõtmeliste muutkondade jaoks. Enne M. Freedmani teoreemi sõnastamist lühidalt kirjeldame topoloogilisi mõisteid, mida M. Freedman kasutas neljamõõtmeliste kompaktsete ühelisiduste topoloogiliste muutkondade klassifikatsiooniks. Üksikasjalik kirjeldus väljub antud artikli piirist ja huvitatud lugeja võib leida vastavate mõistete põhjalikuma kirjelduse järgmistes raamatutes [5],[6],[7].

2. Ruumi $\mathbb{R}^n$ diferentseeruvad struktuurid

2.1. Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus

Olgu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtine hulk ja $f : U \to \mathbb{R}$ reaalväärtustega funktsioon. Oletame, et hulga U igas punktis $p \in U$ on määratud funktsiooni f osatuletised

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n},$$

Kui funktsiooni f osatuletised on pidevad funktsioonid, siis funktsiooni f nimetatakse *pidevalt diferentseeruvaks funktsiooniks* (*continuously differentiable function*) või klassi C^1 funktsiooniks. Pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka tähistame $C^1(U)$. Funktsiooni $f : U \to \mathbb{R}$ nimetatakse *diferentseeruvaks funktsiooniks* punktis $p \in U$, kui leidub lineaarfunktsioon $\sum_{i=1}^n b_i(x^i - p^i), b_i \in \mathbb{R}$ selline, et funktsioon punkti p piisavalt väikses ümbruses kehtib

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - \sum_{i=1}^n b_i(x^i - p^i)}{||x - p||} = 0.$$

Diferentseeruva funktsiooni samaväärne definitsioon on järgmine: funktsiooni $f : U \to \mathbb{R}$ nimetatakse diferentseeruvaks punktis $p \in U$, kui leiduvad reaalarvud $b_1, b_1, \ldots, b_n$, punkti p ümbrus $V \subset U$ ja funktsioon $r(x,p) : V \to \mathbb{R}$ sellised, et

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n b_i(x^i - p^i) + ||x - p||\, r(x,p),$$

kus $r(x,p)$ rahuldab tingimust $\lim_{x \to p} r(x,p) = 0$. Funktsiooni f nimetame diferentseeruvaks hulgal U, kui f on diferentseeruv selle hulga igas punktis.

Lause 2.1.1. *Kui funktsioon $f : U \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $p \in U$, siis f on pidev funktsioon punktis p, punktis p on määratud funktsiooni f osatuletised ja*

$$b_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Seega, kui f on diferentseeruv punktis $p \in U$, siis punkti p piisavalt väikses ümbruses funktsioon f on esitatav kujul

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p (x^i - p^i) + ||x - p||\, r(x, p).$$

Funktsiooni f diferentsiaaliks punktis p nimetatakse avaldist

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p (x^i - p^i),$$

mida tähistatakse $df\big|_p$. Tähistades $dx^i = x^i - p^i$, saame diferentsiaali klassikalise kuju

$$df\big|_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p dx^i \quad \text{või} \quad df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Lause 2.1.2. *Kui funktsiooni $f : U \to \mathbb{R}$ osatuletised on määratud punkti p ümbruses ja nad on pidevad funktsioonid punktis p, siis f on diferentseeruv funktsioon punktis p.*

Järelikult kui f on klassi C^1 funktsioon, siis f on diferentseeruv. Funktsiooni $f : U \to \mathbb{R}$ nimetame klassi $C^r, r \geq 2$ funktsiooniks hulgal U, kui selle funktsiooni esimest järku osatuletised on klassi C^{r-1} funktsioonid hulgal U. Kui suvalise naturaalarvu $r \in \mathbb{N}$ korral funktsioon $f : U \to \mathbb{R}$ on klassi C^r funktsioon, siis funktsiooni f nimetame *siledaks (lõpmata diferentseeruvaks) funktsiooniks* hulgal U (*smooth function on* U). Siledate funktsioonide hulka tähistame $C^\infty(U)$.

Kujutust $\alpha : I \to U$, kus $I \subset \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ ja $\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$, nimetame *siledaks (diferentseeruvaks, klassi C^r) parameetriliseks jooneks*, kui iga $x^i : I \to \mathbb{R}$ on sile (diferentseeruv, klassi C^r) funktsioon hulgal I (kuna iga $x^i(t)$ on ühemuutuja funktsioon, siis sileduse nõue on samaväärne funktsiooni x^i mistahes järku tuletise olemasoluga hulgal I). Eespool antud definitsioonis $I \subseteq \mathbb{R}$ on kas vahemik $(a, b) \subset \mathbb{R}$, poollõik $[a, b), (a, b]$ või lõik $[a, b]$. Kui I on lõik (või poollõik), siis sileduse nõue tähendab, et leidub vahemik (c, d) ja sile funktsioon $\tilde{x}^i : (c, d) \to \mathbb{R}$ sellised, et $I \subset (c, d)$ ning $\tilde{x}^i\big|_I \equiv x^i$. Kui $g : U \to \mathbb{R}$ on sile funktsioon, siis $g \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ on sile funktsioon hulgal I. Igas punktis $t_0 \in I$ kehtib valem

$$\frac{d(g \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=t_0} = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i}\Big|_{\alpha(t_0)} \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=t_0}. \tag{2.1.1}$$

Valemit (2.1.1) nimetatakse ahelreegliks parameetriliste joonte korral.

Olgu $p, q \in U$ punktid. Punktide p, q ühendavaks sirglõiguks nimetame parameetrilist joont $\overline{pq} : [0, 1] \to U$, kus $\overline{pq}(t) = p + t\,(q - p), 0 \leq t \leq 1$, st $x^i(t) = p^i + t\,(q^i - p^i)$. On ilmne, et $\overline{pq}$ on sile parameetriline joon. Lahtist hulka $U \subset \mathbb{R}^n$ nimetame tähekujuliseks punkti $p \in U$ suhtes, kui suvalise punkti

$q \in U$ korral punktide p, q ühendav sirglõik kuulub hulka U, st $\operatorname{Im} \overline{pq} \subset U$ (siin Im on tähistatud lõigu $[0,1]$ kujutis kujutuse $\overline{pq}$ korral).

Teoreem 2.1.3. *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ tähekujuline hulk punkti $p \in U$ suhtes, $g : U \to \mathbb{R}$ diferentseeruv funktsioon. Suvalise punkti $x \in U$ korral leidub $0 < \theta < 1$ nii, et*

$$g(x) - g(p) = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i}\Big|_{\overline{px}(\theta)} (x^i - p^i).$$

Tõestus. Teoreemi tõestus tugineb ühemuutuja keskväärtusteoreemi tõestusele. Tõepoolest, tähistame $\tilde{g}(t) = (g \circ \overline{px})(t), t \in [0,1]$. On ilmne, et $\tilde{g}$ on ühemuutuja diferentseeruv funktsioon. Seega, kehtib ühemuutuja funktsiooni keskväärtusteoreem, st leidub $0 < \theta < 1$ nii, et

$$\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = \frac{d\tilde{g}}{dt}\Big|_{t=\theta}.$$

Arvestame, et $\tilde{g}(1) = (g \circ \overline{px})(1) = g(\overline{px}(1)) = g(x)$ ja analoogiliselt $\tilde{g}(0) = g(p)$. Kasutame ahelreeglit (2.1.1)

$$\frac{d\tilde{g}}{dt}\Big|_{t=\theta} = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i}\Big|_{\overline{px}(\theta)} \frac{d\overline{px}^i}{dt}\Big|_{t=\theta}.$$

Kuid

$$\frac{d\overline{px}^i}{dt}\Big|_{t=\theta} = x^i - p^i. \quad \blacktriangle$$

Lause 2.1.4. *Kui $U \subset \mathbb{R}^n$ on punkti p suhtes tähekujuline hulk, $g : U \to \mathbb{R}$ on diferenteeruv funktsioon, mille osatuletised rahuldavad võrratust $|\frac{\partial g}{\partial x^i}| < K$, kus K on konstant, siis suvalise $x \in U$ korral kehtib*

$$|g(x) - g(p)| < K\sqrt{n}\, ||x - p||.$$

Tõestus tugineb keskväärtusteoreemile js Cauchy-Schwarz võrratusele.

Selle punkti lõpetuseks, meenutame analüütilise funktsiooni definitsiooni. Funktsiooni $f : U \to \mathbb{R}$ nimetatakse *analüütiliseks funktsiooniks* hulgal U, kui hulga U suvalise punkti x korral leidub selle punkti ümbrus $V \subset U$ selline, et vastavas ümbruses funktsiooni f Taylori rida koondub funktsioonile f. Analüütiliste funktsioonide hulka tähistame $C^\omega(U)$. On teada, et $C^\omega(U) \subset C^\infty(U)$. Näiteks, funktsioon

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{kui } t > 0, \\ 0 & \text{kui } t \leq 0, \end{cases}$$

on lõpmata diferentseeruv (sile), kuid punktis $t = 0$ ta ei ole analüütiline funktsioon. Funktsiooni h tuletised on määratud suvalise $t \in \mathbb{R}$ korral ja nad on pidevad funktsioonid

$$h^{(n)}(t) = \begin{cases} \frac{p_n(t)}{t^{2n}}\, h(t) & \text{kui } t > 0, \\ 0 & \text{kui } t \leq 0, \end{cases}$$

kus $p_n(t)$ on $(n-1)$-astme t polünoom, mida määratakse rekursiivse valemiga

$$p_1(t) = 1, \;\; p_{n+1}(t) = t^2\, p_n'(t) - (2nt - 1)\, p_n(t).$$

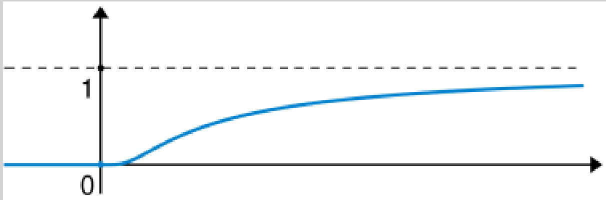
Tõestus baseerub valemil

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^m} e^{-\frac{1}{t}} = 0, \quad m \geq 0.$$

Arendades funktsiooni h Taylori ritta punktis $t = 0$ saame

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} t^n = 0,$$

st Taylori rida punktis $t = 0$ koondub null funktsioonile ja ei võrdu $h(t)$, kui $t > 0$. Järelikult, funktsioon $h(t)$ ei ole analüütiline punktis $t = 0$.



Joonis 13: Sile mitteanalüütiline funktsioon

Käesoleva kursuse põhiobjektiks on diferentseeruv muutkond ja üldiselt meie ei kasuta analüütilist struktuuri, kuid mainime, et

- iga lineaarfunktsioon $\sum_i a_i x^i$ (lõplik summa) on analüütiline;
- iga polünoom $P(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ on analüütiline funktsioon;

- iga ratsionaalfunktsioon $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kus P, Q on polünoomid, on analüütiline funktsioon hulgal, kus nimetaja ei võrdu nulliga.

Järelikult, determinant on ruutmaatriksi elementide analüütiline funktsioon. Kui vaatleme regulaarsete maatriksite rühma $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, siis iga maatriksi korral eksisteerib tema pöördmaatriks ja pöördmaatriksi iga element on lähtemaatriksi elementide analüütiline funktsioon. Seda meie kasutame hiljem Lie rühmade teoorias.

2.2. Kujutused ja Jacobi maatriksid

Kujutuseks $F : U \to \mathbb{R}^m$, kus $U \subset \mathbb{R}^n$ on lahtine hulk, nimetame eeskirja, mis igale punktile $x \in U$ seab vastavusse üheselt määratud punkti $F(x) \in \mathbb{R}^m$. Iga $i = 1, 2, \ldots, m$ korral defineerime funktsiooni $\pi^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ valemiga $\pi^i(x^1, x^2, \ldots, x^m) = x^i$. Funktsioone $f^1, f^2, \ldots, f^m$, kus $f^i : U \to \mathbb{R}, f^i = \pi^i \circ F$, nimetatakse kujutuse koordinaatfunktsioonideks. On ilmne, et kujutus F on üheselt määratud oma koordinaatfunktsioonidega, st $F = (f^1, f^2, \ldots, f^m)$. Mainime, et kui vaadelda ruumi $\mathbb{R}^m$, kui vektorruumi, siis kujutust $F : U \to \mathbb{R}^m$ võime nimetada vektorväärtustega funktsiooniks, nagu teevad mõned autorid. Meie siiski kasutame terminit kujutus. Üldisest topoloogiast teame, et kujutus F on pidev kujutus, kui selle kujutuse iga koordinaatfunktsioon on pidev.

Definitsioon 2.2.1. Kujutust $F : U \to \mathbb{R}^m$ nimetame diferentseeruvaks (klassi C^1, klassi C^r, siledaks) kujutuseks, kui selle kujutuse koordinaatfunktsioonid $f^1, f^2, \ldots, f^m$ on vastava klassi funktsioonid.

Kui F on diferentseeruv kujutus, siis koordinaatfunktsioonide osatuletised on määratud (nad ei pea olema pidevad) ja kujutusega F assotsieerub $m \times n$ maatriks

$$DF = \frac{\partial(f^1, f^2, \ldots, f^m)}{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

Maatriksit DF nimetatakse kujutuse F *Jacobi maatriksiks*. Jacobi maatriksi väärtust punktis $x \in U$ tähistame $DF(x)$, see on arvmaatriks. Jacobi maatriks on funktsioonaalmaatriks, kuna tema elemendid on funktsioonid hulgal U. Jacobi maatriksi elemendid on pidevad funktsioonid, kui kujutus F on klassi C^1 kujutus. Kujutuse diferentseeruvusele võime anda teise sõnastuse, mida meie kasutame järgnevas.

Teoreem 2.2.2. *Kujutus $F : U \to \mathbb{R}^m$ on diferentseeruv punktis $p \in U$ parajasti siis, kui leidub $m \times n$ maatriks A, mille elemendid on reaalarvud, punktist p sõltuv kujutus $R : U \to \mathbb{R}^m$, kus $R(x,p) = (r^1(x,p), r^2(x,p), \ldots, r^m(x,p))$, selline, et $||R(x,p)|| \to 0$, kui $x \to p$, ning suvalise $x \in U$ korral kehtib*

$$F(x) = F(p) + A \cdot (x - p) + ||x - p||\, R(x,p). \tag{2.2.2}$$

Kui sellised $A, R(x,p)$ leiduvad, siis A on määratud üheselt ja ta on võrdne kujutuse F Jacobi maatriksiga $DF(p)$.

Märkus: valemis (2.2.2) kasutatakse maatrikskorrutist, st teine liige on maatriksi A ja üheveerulise maatriksi $x - p$ korrutis ja kolmas liige on arvuga $||x - p||$

korrutatud uheveeruline maatriks $R(x,p)$. Valemi (2.2.2) kuju koordinaatfunktsioonides on järgmine

$$f^i(x) = f^i(p) + a^i_j(x^j - p^j) + ||x-p||\, r^i(x,p),$$

või

$$f^i(x) = f^i(p) + \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x^j - p^j) + ||x-p||\, r^i(x,p).$$

Lause 2.2.3. *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ punkti p suhtes tähekujuline hulk, $F : U \to \mathbb{R}^m$ diferentseeruv kujutus, mille koordinaatfunktsioonide osatuletised rahuldavad võrratust $|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}| < K$ iga $1 \le i \le m$ ja $1 \le j \le n$ korral. Suvalise $x \in U$ korral kehtib*

$$||F(x) - F(p)|| \le K\sqrt{nm}\,||x-p||. \tag{2.2.3}$$

Selle punkti lõpetame ahelreegliga kujutuste kompositsiooni korral. Olgu $F : U \to V \subset \mathbb{R}^m, G : V \to \mathbb{R}^k$, kus $U \subset \mathbb{R}^n$. On määratud kujutuste kompositsioon $H = G \circ F : U \to \mathbb{R}^k$ ja selle kompositsiooni koordinaatfunktsioonid $H(x) = (h^1(x), h^2(x), \dots, h^k(x))$ avalduvad kujutuste F, G koordinaatfunktsioonide kaudu järgmiselt

$$h^i(x) = g^i(f^1(x), f^2(x), \dots, f^m(x)), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Teoreem 2.2.4. *Kui F on punktis $p \in U$ diferentseeruv kujutus, G on punktis $q = F(p)$ diferentseeruv kujutus, siis H on punktis p diferentseeruv kujutus ja*

$$DH(p) = DG(q) \cdot DF(p). \quad \textit{(ahelreegel kujutuste korral)} \tag{2.2.4}$$

Kui F on diferentseeruv hulgal U, G on diferentseeruv hulgal V, siis H on diferentseeruv hulgal U ja valem (2.2.4) kehtib hulga U igas punktis.

2.3. Ruumi $\mathbb{R}^n$ puutujaruum

Diferentseeruva muutkonna esimeseks tähtsaks struktuuriks on tema puutujaruum muutkonna punktis. Antud punktis kirjeldame ruumi $\mathbb{R}^n$ puutujaruumi punktis $p \in \mathbb{R}^n$. Selleks vaatleme kaks lähenemist, esimene tugineb meie intuitiivsele geomeetrilisele kujutusele, teine on abstraktne ja formaalne, kuid järgnevas meie kasutame just teist lähenemist, kuna ta osutub väga kasulikuks puutujaruumi üldistustes.

Olgu $p \in \mathbb{R}^n$ ruumi $\mathbb{R}^n$ mingi punkt koordinaatidega $p = (p^1, p^2, \ldots, p^n)$. Ruumi $\mathbb{R}^n$ puutujavektoriks punktis p nimetame paari $X(p) = (p; \mathbf{v})$, kus p on ruumi $\mathbb{R}^n$ punkt ja $\mathbf{v} = (v^1, v^2, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ on vektor. Puutujavektorite hulka punktis p tähistame $T_p(\mathbb{R}^n)$. On ilmne, et $T_p(\mathbb{R}^n)$ on n-dimensionaalne vektorruum vektorite liitmise ja arvuga korrutamise suhtes

$$X(p) + Y(p) = (p; \mathbf{v} + \mathbf{w}), \;\; \lambda\, X(p) = (p; \lambda\, \mathbf{v}), \tag{2.3.1}$$

kus $X(p) = (p; \mathbf{v}), Y(p) = (p; \mathbf{w})$. Vektorruumi $T_p(\mathbb{R}^n)$ nimetame *ruumi* $\mathbb{R}^n$ *puutujaruumiks punktis* p. Puutujaruum on n-mõõtmeline vektorruum ja selle ruumi vektoreid

$$E_1(p) = (p; \mathbf{e}_1),\; E_2(p) = (p; \mathbf{e}_2),\; \ldots\;,\; E_n(p) = (p; \mathbf{e}_n),$$

nimetame puutujaruumi kanooniliseks reeperiks punktis p . Suvalise puutujavektori $X(p) \in T_p(\mathbb{R}^n)$ korral kehtib $X(p) = \sum_{i=1}^n v^i\, E_i(p)$.

Puutujaruum $T_p\mathbb{R}^n$ punktis p on eukleidiline ruum, kui puutujavektorite skalaarkorrutamist määrame valemiga

$$< X(p), Y(p) >=< \mathbf{v}, \mathbf{w} >, \tag{2.3.2}$$

kus $X(p) = (p; \mathbf{v}), Y(p) = (p; \mathbf{w}) \in T_p\mathbb{R}^n$. Puutujaruumi $T_p\mathbb{R}^n$ baas $\{E_i(p)\}$ on ortonormeeritud baas, st

$$< E_i(p), E_j(p) >= \delta_{ij}. \tag{2.3.3}$$

Olgu $\epsilon > 0$ reaalarv ja

$$\alpha : I_\epsilon \to \mathbb{R}^n, \alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)), \;\; I_\epsilon = \{t \in \mathbb{R} : |t| < \epsilon\},$$

sile parameetriline joon selline, et ta läbib punkti $p = (p^1, p^2, \dots, p^n)$. Seega $\alpha(0) = p$ või koordinaatides $x^i(0) = p^i$. Joone α puutujavektoriks (kiirusvektoriks) punktis p nimetame ruumi $\mathbb{R}^n$ puutjuavektorit

$$\dot{\alpha}(0) = (p; \dot{x}^1(0), \dot{x}^2(0), \dots, \dot{x}^n(0)), \; \dot{x}^i(0) = \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Kaks siledat parameetrilist joont α, β nimetame ekvivalentseteks, kui $x^i(0) = y^i(0)$ ja $\dot{x}^i(0) = \dot{y}^i(0)$, kus

$$\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)), \;\; \beta(t) = (y^1(t), y^2(t), \dots, y^n(t)).$$

Joone α ekvivalentsiklassi tähistame $[\alpha]$. Kujutus $[\alpha] \to \dot{\alpha}(0) \in T_p(\mathbb{R}^n)$ on bijektiivne. Tõepoolest ta on injektiivne, kuna eeldusest $[\alpha] \neq [\beta]$ järeldub, et

$\dot\alpha(0) \neq \dot\beta(0)$. Näitame, et ta on peale kujutus. Tõepoolest, kui on antud puutujavektor $X(p) = (p; \mathbf{v})$, kus $\mathbf{v} = (v^1, v^2, \dots, v^n)$, siis alati leidub parameetriline joon α, mille puutujavektoriks on vektor $X(p)$. Defineerime

$$\alpha(t) = (p^1 + v^1\,t, p^2 + v^2\,t, \dots, p^n + v^n\,t), \quad |t| < \epsilon.$$

Seega α on sirge, mis läbib punkti p, $\mathbf{v}$ on selle sirge sihivektor ja $[\alpha] \to \dot\alpha(0) = X(p)$. Järelikult kujutus $[\alpha] \to \dot\alpha(0) \in T_p(\mathbb{R}^n)$ on bijektiivne, vektorruumi $T_p(\mathbb{R}^n)$ vektorid on üks-üheses vastavuses punkti p läbivate joonte kiirusvektoritega ja see õigustab termini puutujaruum kasutamist.

Olgu $p \in \mathbb{R}^n$ ja $C^\infty(p)$ selliste lõpmata diferentseeruvate funktsioonide hulk, et iga funktsiooni $f \in C^\infty(p)$ määramispiirkond $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sisaldab punkti p. Funktsiooni $f \in C^\infty(p), f : D \to \mathbb{R}$ samastame funktsiooniga $g \in C^\infty(p), g : D' \to \mathbb{R}$ ja kirjutame $f \equiv g$, kui leidub punkti p ümbrus V selline, et $V \subset D, V \subset D', f\big|_V \equiv g\big|_V$. Mainime, et ülalpool defineeritud funktsioonide samastamine on ekvivalentsiseos ja funktsiooni f ekvivalentsiklassi nimetatakse *funktsiooni kasvuks punktis p* (germ). Antud konspektis esitatud käsitlus ei kasuta vastavat mõistet. Kui $X(p) = \sum_{i=1}^n v^i\,E_i(p) \in T_p(\mathbb{R}^n)$ on ruumi $\mathbb{R}^n$ mingi puutujavektor punktis p, siis seame temale vastavusse suunatuletise antud vektori suunas

$$X(p) \to X_p^* = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p =< X(p), \nabla f(p) >, \tag{2.3.4}$$

kus $\nabla f(p) = (p; \frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p)$ on funktsiooni f gradient punktis p. Olgu $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ sile parameetriline joon, mis läbib punkti p, st $\alpha(0) = p$, ja selle puutujavektor on vektor $X(p)$, st $\dot{\alpha}(0) = X(p)$. Suvalise $f \in C^\infty(p)$ korral kehtib

$$X_p^*(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p, \quad X_p^* : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$$

Järelikult X_p^* seab igale funktsioonile f hulgast $C^\infty(p)$ üheselt määratud arvu ja seega X_p^* on *funktsionaal.*

Nüüd teine lähenemine puutujaruumi $T_p(\mathbb{R}^n)$ puutujavektorile baseerub kujutusel

$$\text{puutujavektor } X(p) = \sum_{i=1}^n v^i E_i(p) \leftrightarrow X_p^* = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \text{ funktsionaal.}$$

Uurime, millised on funktsionaali $X_p^* : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ omadused. Alustame hulga $C^\infty(p)$ algebralisest struktuurist. Kui $f, g \in C^\infty(p)$, siis defineerime summa $f+g$, arvuga korrutist λf ja korrutist $f\,g$ valemitega

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \tag{2.3.5}$$

$$(\lambda f) = \lambda f(x), \tag{2.3.6}$$

$$(f\,g)(x) = f(x)\,g(x). \tag{2.3.7}$$

Saab näidata, et $C^\infty(p)$ on assotsiatiivne ühikuga algebra ülalpool defineeritud tehete suhtes, kus ühikelement on funktsioon $\mathbf{1}(x) = 1$. Kuna punkti p ümbruses konstantsed funktsioonid kuuluvad algebrasse $C^\infty(p)$ ja konstantset funktsiooni võime samastada vastava arvuga (tema väärtusega), siis reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ on algebra $C^\infty(p)$ alamalgebra. Funktsionaalidel $X_p^* : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ on järgmised omadused:

- $X_p^*(\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda\,(X_p^* f) + \mu\,(X_p^* g)$, (lineaarsus)
- $X_p^*(f\, g) = (X_p^* f)\, g(p) + f(p)\,(X_p^* g)$. (Leibnizi valem)

Definitsioon 2.3.1. Funktsionaali $D : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ nimetame algebra $C^\infty(p)$ *derivatsiooniks punktis* p, kui ta on lineaarfunktsionaal ja rahuldab Leibnizi valemit. Algebra $C^\infty(p)$ derivatsioonide hulka tähistame $\mathcal{D}(p)$.

On ilmne, et suvalise puutujavektoriga $X(p)$ tekitatud funktsionaal X_p^* kuulub hulka $\mathcal{D}(p)$, st $X_p^* \in \mathcal{D}(p)$. Derivatsioonide hulk $\mathcal{D}(p)$ on vektorruum üle $\mathbb{R}$, kui defineerida

$$(\lambda\, D_1 + \mu\, D_2)\, f = \lambda\,(D_1 f) + \mu\,(D_2 f),$$

kus $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(p)$, $f \in C^\infty(p)$. On lihtne veenduda, et kujutus $X(p) \to X_p^*$ on injektiivne lineaarkujutus $T_p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(p)$. Tõepoolest, kui $X_p^* = Y_p^*$, st suvalise $f \in C^\infty(p)$ korral $X_p^* f = Y_p^* f$, siis vastavad puutujavektorid on võrdsed $X(p) = Y(p)$, kuna võrdsus peab olema täidetud ka koordinaatfunktsioonide korral x^i, st $X_p^* x^i = Y_p^* x^i$, järelikult $X_p^* x^i = v^i$ ja $Y_p^* x^i = w^i$. Seega, $X(p) = Y(p)$.

Teoreem 2.3.2. *Ruumi $\mathbb{R}^n$ puutujaruum $T_p(\mathbb{R}^n)$ on isomorfne algebra $f \in C^\infty(p)$ derivatsioonide punktis p vektorruumiga $\mathcal{D}(p)$ ja antud isomorfism on kujutus, mis seab igale puutujavektorile $X(p)$ vastavusse üheselt määratud suunatuletise X_p^* vektori $X(p)$ suunas.*

Lemma 2.3.3. *Suvalise derivatsiooni $D \in \mathcal{D}(p)$ väärtus on null, kui funktsioon $f \in C^\infty(p)$ on konstantne.*

Tõestus. Kuna D on lineaarkujutus $D : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, piisab sellest, kui meie tõestame sellise konstantse funktsiooni korral, mille väärtus on 1. Olgu $f : U \to \mathbb{R}$, $f\big|_U = 1, p \in U$. Teise omaduse tõttu saame

$$Df = D(f\,f) = (Df)\,f(p) + f(p)\,(Df) = (Df)\,1 + 1\,(Df) = 2\,Df \;\Rightarrow Df = 0.$$

Lemma 2.3.4. *Olgu $f : U \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ lõpmata diferentseeruv funktsioon. Kui $p \in U$, siis leidub lahtine kera $B_r(p) \subset U$ ja lõpmata diferentseeruvad funktsioonid $g^i : B_r(p) \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ nii, et*

- $g^i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p$;
- $f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i)\, g^i(x)$.

Tõestus. Olgu $r > 0$ piisavalt väike arv, et lahtine kera $B_r(p)$ on U alamhulk. Selle kera igas punktis $x \in B_r(p)$ kehtib valem

$$f(x) = f(p) + \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(f\,(p + t\,(x - p))\Big)\,dt.$$

Integraali all asuva tuletise võime kirjutada kujul

$$\frac{d}{dt}\Big(f\,(p + t\,(x - p))\Big) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{p+t\,(x-p)} \frac{dx^i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{p+t\,(x-p)} (x^i - p^i).$$

Seega

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{p+t\,(x-p)}\,dt.$$

Tähistame

$$g^i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{p+t\,(x-p)} dt.$$

Kuna f on lõpmata diferentseeruv, parameetriline joon $p+t\,(x-p)$ on ka lõpmata diferentseeruv, siis parameetritest $x^1, x^2, \ldots, x^n$ sõltuv integraal on ka lõpmata diferentseeruv funktsioon.On ilmne, et $g^i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p$. ▲

Tõestus. Teoreemi tõestuseks näitame, et suvalise derivatsiooni $D \in \mathcal{D}(p)$ korral leidub puutujavektor X_p selline, et $D = X_p^*$, st suvalise funktsiooni korral $Df = X_p^* f$. Konstrueerime puutujavektori järgmiselt: defineerime $v^i = Dx^i$, kus x^i on koordinaatfunktsioonid ning

$$X_p = \sum_i v^i\, E_{ip} \to X_p^* = \sum_i v^i\, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.$$

Nüüd kasutame Lemma 2.3.4. Funktsiooni f esitame kujul

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i)\, g^i(x), \quad x \in B_r(p).$$

Kehtib

$$Df = D(f(p)) + \sum_{i=1}^n \big[\big(D(x^i - p^i)\big)\, g^i(p) + 0\, Dg^i\big],$$

kus

$$D(f(p)) = 0,\ D(x^i - p^i) = v^i,\ g^i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p.$$

Seega

$$Df = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p = X_p^* f. \quad \blacktriangle$$

Seega, meie nüüd võime puutujaruumi $T_p(\mathbb{R}^n)$ samastada algebra $C^\infty(p)$ derivatsioonidega. Teiste sõnadega, meie näitasime, et iga derivatsioon on esimest järku diferentsiaaloperatoor konstantsete kordajatega ja muid derivatsioone ei ole. Mainime, et

$$E_i(p) \to E_{i;p}^* = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.$$

Järgnevas meie samastame puutujavektori temale vastava diferentsiaaloperaatoriga js seepärast tärni jätame ära, st

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \quad E_i(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.$$

Märkus 2.3.5. Meenutame, et ruumi $\mathbb{R}^n$ puutujaruum $T_p\mathbb{R}^n$ on eukleidiline ruum skalaarkorrutamise $<\,,\,>$ suhtes, kusjuures baas $\{E_i(p)\}$ on puutujaruumi $T_p\mathbb{R}^n$ ortonormeeritud baas. Seega

$$< \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p > = < E_i(p), E_j(p) > = \delta_{ij}. \tag{2.3.8}$$

Märkus 2.3.6. On huvitav mainida, et tõestatud isomorfismis $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{D}(p)$ funktsioonide klassi sileduse nõue (selle punkti teoreemis ja lemmades kõik funktsioonid on siledad) on oluline. Osutub, et kui vaadelda klassi C^r funktsioone, siis eespool kirjutatud isomorfism enam ei kehti. Sel juhul $C^r(p)$ on endiselt algebra, kuid derivatsioonide ruum $\mathcal{D}(p)$ on laiem ja sisaldab mitte ainult suunatuletisi (vt [12]).

Olgu $F : U \to \mathbb{R}^m$ klassi C^∞ kujutus, st sile kujutus. Olgu $\alpha : I \to U$, $I \subset \mathbb{R}$ parameetriline joon, kus $\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$, $x^i(t) \in C^\infty(I)$ ja $\alpha(0) = p \in U$. Kujutus F tekitab parameetrilist joont $\tilde{\alpha} = F \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^m$, mis läbib punkti $F(p)$, st $\tilde{\alpha}(0) = F(p)$. Olgu $\dot{\alpha}(0) = X_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$. Defineerime kujutuse F diferentsiaali sellisel kujul, mis ei sõltu koordinaatidest.

Definitsioon 2.3.7. Kujutuse F differentsiaaliks punktis $p \in U$ nimetatakse kujutust $DF_p : T_p(\mathbb{R}^n) \to T_{F(p)}(\mathbb{R}^m)$, mida määratakse valemiga

$$DF_p(X_p) = \frac{d\tilde{\alpha}}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d(F \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Koordinaatides kehtivad järgmised valemid: kui ruumi $\mathbb{R}^m$ koordinaate tähistada $y^1, y^2, \ldots, y^m$ ja $X_p = (p; v^1, v^2, \ldots, v^n), F = (f^1, f^2, \ldots, f^m)$, $DF_p(X_p) = (F(p); w^1, w^2, \ldots, w^m) = Y_{F(p)}$, siis

$$\begin{aligned} w^\mu &= \frac{\partial f^\mu}{\partial x^i}\Big|_p v^i = DF^\mu_i(p)\, v^i, \\ Y_{F(p)} &= X_p(f^\mu)\, \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \end{aligned}$$

kus $DF(p)$ on kujutuse F Jacobi maatriks.

2.4. Vektorväljad ruumis $\mathbb{R}^n$

Vektorvälja mõiste on väga tähtis diferentseeruvate muutkondade teoorias, kuid selline mõiste on tähtis ka rakendustes, nt teoreetilises mehaanikas ja füüsikas. Antud punktis vaadeldakse vektorvälju ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtistel hulgadel.

Definitsioon 2.4.1. *Vektorväljaks* lahtisel hulgal $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nimetatakse kujutust $X : p \to X(p) \in T_p(\mathbb{R}^n)$, mis seab hulga U igale punktile p vastavusse üheselt määratud ruumi $\mathbb{R}^n$ puutujavektori $X(p) \in T_p(\mathbb{R}^n)$.

Olgu $X(p) = (p; v^1, v^2, \ldots, v^n)$ mingi ruumi $\mathbb{R}^n$ puutujavektor punktis $p \in U$. Kehtib

$$X(p) = \sum_i^n v^i\, e_{i;p} = \sum_i^n v^i\, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p. \tag{2.4.1}$$

Ülalpool antud definitsioon näitab, et vektorväli X määrab U igas punktis ruumi $\mathbb{R}^n$ puutujavektori, seega vektorvälja X korral koordinaadid $v^1, v^2, \ldots, v^n$ on hulga U muutuva punkti $x \in U$ funktsioonid, st $f^1(x), f^2(x), \ldots, f^n(x)$, kus iga funktsiooni f^i määramispiirkond on U ja $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in U$. Valemist (2.4.1) järeldub, et vektorväli kuju koordinaatides on

$$X = \sum_{i=1}^n X^i(x)\, e_i = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.4.2}$$

kus e_i on vektorväli, mida määratakse valemiga $e_i(p) = e_{i;p}$, kus $p \in \mathbb{R}^n$ on suvaline punkt. Ruumi $\mathbb{R}^n$ puutujavektorit $X(p)$ nimetame vektorvälja X väärtuseks punktis p.

Definitsioon 2.4.2. Kui valemis (2.4.2) funktsioonid on lõpmata diferentseeruvad $f^i \in C^\infty(U)$, siis vektorvälja X nimetatakse *siledaks vektorväljaks* (*smooth vector field*). Siledate vektorväljade hulka tähistame $\mathcal{D}(U)$.

Kuna järgnevas tegeleme ainult siledate vektorväljadega, sageli sõna *sile* ei kirjuta ja termin vektorväli tähendab sile vektorväli. Funktsioone f^i nimetame vektorvälja koordinaatfunktsioonideks või komponentideks. Ruumi $\mathbb{R}^n$ igas punktis p on määratud puutujavektorid

$$e_{1;p} = \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, e_{2;p} = \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p, \ldots, e_{n;p} = \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p,$$

ja nad moodustavad puutujaruumi $T_p(\mathbb{R}^n)$ baasi. Seega, iga baasivektor $e_{i;p}$ määrab sileda vektorvälja e_i ruumis $\mathbb{R}^n$ järgmiselt $e_i(p) = e_{i;p}$. Seega vektorväljad

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, e_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n},$$

moodustavad ruumi $\mathbb{R}^n$ puutujaruumi $T_p(\mathbb{R}^n)$ baasi ruumi $\mathbb{R}^n$ igas punktis.

Definitsioon 2.4.3. Olgu $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{D}(U)$ vektorväljad. Kui U igas punktis p ruumi $\mathbb{R}^n$ puutujavektorid $E_1(p), E_2(p), \ldots, E_n(p)$ moodustavad puutujaruumi $T_p(\mathbb{R}^n)$ baasi, siis vektorväljade peret $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ nimetatakse *reeperiväljaks* (*field of frames*).

Seega $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ on reeperiväli, mida järgnevas nimetame ruumi $\mathbb{R}^n$ *kanooniliseks reeperiväljaks*. Kui $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ on hulgal U määratud reeperiväli, siis suvalises punktis $x \in U$ kehtib

$$E_i(x) = \sum_j A_i^j(x)\, e_j(x), \tag{2.4.3}$$

kus ruutmaatriksi $A(x) = (A_i^j(x))$ elemendid on punkti $x \in U$ siledad funktsioonid ja ruutmaatriks $A(x)$ on U suvalises punktis x regulaarne maatriks, st $\forall x \in U, \operatorname{Det} A(x) \neq 0$.

Definitsioon 2.4.4. Maatriksit $A(x)$ nimetatakse *üleminekumaatriksiks* reeperiväljalt $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ reeperiväljale $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$.

Reeperiväli $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ hulgal U tekib siis, kui hulgal U on antud uus koordinaadisüsteem. Tõepoolest oletame, et lahtisel hulgal U on antud teine koordinaadisüsteem uute koordinaatidega $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$. Uued koordinaadid määravad kujutuse

$$\phi : p \in U \to (x^{1'}(p), x^{2'}(p), \ldots, x^{n'}(p)) \in V \subset \mathbb{R}^n.$$

On ilmne, et kujutus ϕ on bijektsioon. Ristkoordinaadid $x^1, x^2, \ldots, x^n$ määravad kujutuse

$$\psi : p \in U \to (x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p)) \in W \subset \mathbb{R}^n.$$

Kujutuste kompositsioonid $\phi \circ \psi^{-1} : W \to V$, $\psi \circ \phi^{-1} : V \to W$ on teineteise pöördkujutused ja nad näitavad, kuidas ühed koordinaadid avalduvad teiste koordinaatide kaudu. Tõepoolest

$$\phi \circ \psi^{-1} : W \to V, \quad x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{2.4.4}$$

$$\psi \circ \phi^{-1} : V \to W, \quad x^{i} = x^{i}(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}). \tag{2.4.5}$$

Funktsioone $x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ nimetatakse *üleminekufunktsioonideks* koordinaatidelt $x^1, x^2, \ldots, x^n$ koordinaatidele $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$.

Definitsioon 2.4.5. Olgu $V, W \subset \mathbb{R}^n$ lahtised hulgad. Kujutust $\phi : V \to W$ nimetatakse *difeomorfismiks* (*diffeomorphism*), kui

- ϕ on bijektsioon,
- ϕ on sile kujutus,
- ϕ^{-1} on sile kujutus.

Definitsioon 2.4.6. Kui hulgal $U \subset \mathbb{R}^n$ on antud kaks koordinaadisüsteemi $x^1, x^2, \ldots, x^n$ ja $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$, siis neid nimetatakse C^∞-kooskõlalisteks koordinaadisüsteemideks, kui üleminekufunkitsioonide $x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ poolt määratud kujutus $\phi \circ \psi^{-1} : W \to V$ (2.4.4) on difeomorfism.

Üleminekufunktsioonide jaoks kasutame kompaktseid valemeid

$$\phi \circ \psi^{-1} : W \to V, \quad x^{i'} = x^{i'}(x^i), \tag{2.4.6}$$

$$\psi \circ \phi^{-1} : V \to W, \quad x^i = x^i(x^{i'}). \tag{2.4.7}$$

Kujutuse $\phi \circ \psi^{-1} : W \to V, \quad x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ Jacobi maatriks on regulaarne n-järku ruutmaatriks $A = (A^{i'}_i)$, kus

$$A^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.$$

Kujutuse $\psi \circ \phi^{-1} : V \to W, \quad x^i = x^i(x^{i'})$ Jacobi maatriks on regulaarne n-järku ruutmaatriks $\tilde{A} = (A^i_{i'})$, kus

$$A^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

Kuna kujutused $\phi\circ\psi^{-1}, \psi\circ\phi^{-1}$ on teineteise pöördkujutused, kehtivad valemid

$$x^{i'}(x^i(x^{j'})) = x^{i'}, \;\; x^i(x^{i'}(x^j)) = x^i. \tag{2.4.8}$$

Diferentseerides esimest valemit $x^{j'}$ järgi saame

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = A_i^{i'}A_{j'}^i = \delta_{j'}^{i'}.$$

Analoogiliselt teise valemi diferentseerimine x^j järgi annab

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = A_{i'}^i A_j^{i'} = \delta_j^i.$$

Seega $A, \tilde{A}$ on teineteise pöördmaatriksid, st $\tilde{A} = A^{-1}$.

Koordinaadid $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$ tekitavad U peal reeperivälja $\{E_{1'}, E_{2'}, \ldots, E_{n'}\}$, mis koosneb vektorväljadest

$$E_{i'} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}}.$$

Leiame üleminekumaatriksi

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \to \{E_{1'}, E_{2'}, \ldots, E_{n'}\}.$$

Olgu $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ mingi sile funktsioon. Kui koordinaadid $x^1, x^2, \ldots, x^n$ asendame üleminekufunktsioonidega $x^i(x^{i'})$, siis saame uue funktsiooni $\tilde{f}(x^{i'}) = f(x^i(x^{i'}))$. Kehtib

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial f(x^i(x^{i'}))}{\partial x^i}.$$

Kuna see valem kehtib suvalise funktsiooni korral, võime kirjutada

$$E_{i'} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e_i = A^i_{i'} e_i.$$

Seega üleminekumaatriks on difeomorfismi $\psi \circ \phi^{-1} : V \to W, x^i = x^i(x^{i'})$ Jacobi maatriks ja ta on difeomorfismi $\phi \circ \psi^{-1} : W \to V, x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ Jacobi maatriiksi pöördmaatriks.

Olgu $X \in \mathcal{D}(U)$ vektorväli ja hulgal U on antud kaks koordinaadisüsteemi $x^1, x^2, \ldots, x^n$ ning $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$. Esimene koordinaadisüsteem indutseerib reeperivälja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ja teine indutseerib $\{E_{1'}, E_{2'}, \ldots, E_{n'}\}$, kus

$$E_{i'} = A^i_{i'} e_i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e_i.$$

Olgu

$$X = X^i e_i = X^{i'} E_{i'}.$$

On lihtne näidata, et

$$X^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} X^{i'}.$$

Antud valem näitab, et vektorvälja koordinaatfunktsioonid moodustavad *kontravariantse tensorvälja.*

Arvestades, et ruumi $\mathbb{R}^n$ igas punktis p puutujaruum $T_p(\mathbb{R}^n)$ on eukleidiline ruum ja igas punktis p baas $\{e_{i;p}\}$ on ortonormeeritud baas, kehtib

$$< e_i, e_j >=< \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} >= \delta_{ij}. \tag{2.4.9}$$

Järelikult, kui

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

kus X, Y on vektorväljad määramispiirkonnaga U, siis on määratud vektorväljade skalaarkorrutis

$$< X, Y >= \sum_i X^i Y^i,$$

ja see on lõpmata diferentseeruv funktsioon hulgal U.

Definitsioon 2.4.7. Kui $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ on reeperiväli hulgal U, siis reeperivälja poolt määratud meetrikaks hulgal U nimetatakse sümmeetrilist ruutmaatriksit g, mille elemendid on

$$g_{ij} =< E_i, E_j > .$$

Meetrika elemendid g_{ij} on U koordinaatide siledad funktsioonid ja neid nimetatakse meetrika g komponentideks.

Ülesanne. Tasandi lahtisel hulgal $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{L\}$, kus L on x-koordinaattelje mittenegatiivne pool (alguspunktist lähtuv kiir) on määratud ristkoordinaadisüsteem x, y ja polaarkoordinaadisüsteem r, θ, kus üleminekufunktsioonidest moodustatud difeomorfism on

$$(r\, \cos\theta, r\, \sin\theta) : (r, \theta) \in D \to (x, y) \in U,$$

kus $D = \{(r,\theta) : r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Ristkoordinaadid tekitavad kanoonilist reeperivälja

$$\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y}\},$$

ja polaarkoordinaadid tekitavad reeperivälja

$$\{E_1 = \frac{\partial}{\partial r}, E_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}\}.$$

Leidke üleminekumaatriks reeperiväljalt $\{e_1, e_2\}$ reeperiväljale $\{E_1, E_2\}$. Leidke reeperivälja $\{E_1, E_2\}$ poolt tekitatud meetrika g.

Ülesanne. Hulgal U on antud kaks koordinaadisüsteemi $x^1, x^2, \ldots, x^n$ ning $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$. Esimene koordinaadisüsteem indutseerib reeperivälja $\{E_i\}$ ja teine indutseerib reeperivälja $\{E_{i'}\}$, kus

$$E_{i'} = A^i_{i'} e_i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e_i.$$

Reeperiväli $\{E_i\}$ tekitab meetrikat (g_{ij}) ja reeperiväli $\{E_{i'}\}$ tekitab meetrikat $g_{i'j'}$. Näidake, et

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}.$$

Antud valem näitab, et meetrika komponendid moodustavad 2-korda kovariantse tensorvälja.

Vektorväli X määrab teisenduse $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, kui suvalise $f \in C^\infty(U)$ korral defineerime

$$X f = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{2.4.10}$$

Kuna valemi (2.4.10) parempool on siledate funktsioonide korrutiste summa, siis $X f$ on sile funktsioon ja definitsioon on korrektne. Uurime vektorvälja algebra vaatekohalt. Selleks meenutame, et $C^\infty(U)$ on assotsiatiivne kommutatiivne ühikuga algebra. On lihtne näidata, et suvalise vektorvälja korral kehtivad omadused

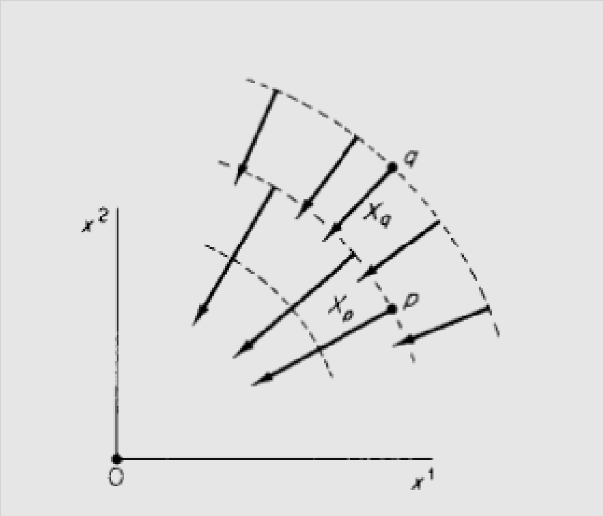
- $X(\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda\,(X f) + \mu\,(X g), \quad$ (lineaarsus)
- $X(f\, g) = (X f)\, g + f\,(X g), \quad$ (Leibnizi valem)

kus λ, μ on reaalarvud ja f, g on siledad funktsioonid. Seega vektorväli X on funktsioonide algebra lineaarteisendus, mis rahuldab Leibnizi valemit. Algebra lineaarteisendust, mis rahuldab Leibnizi valemit, nimetatakse algebra *derivatsiooniks*. Järelikult, algebra seisukohalt *vektorväli on funktsioonide algebra derivatsioon.*

Milline on hulga $\mathcal{D}(U)$ algebraline struktuur? Osutub, et $\mathcal{D}(U)$ on moodul üle funktsioonide algebra $C^\infty(U)$, kui vektorväljade summa ja korrutist funktsiooniga määrame järgmiselt:

$$(X + Y)(p) = X(p) + Y(p), \quad (g\, X)(p) = g(p)\, X(p).$$

Näide 2.4.8. Vektorvälja hästi tuntud näide on gravitatsiooniväli. Olgu $\mathbb{R}^3$ kolmemõõtmeline ruum ristkoordinaatidega x, y, z ja ruumi $\mathbb{R}^3$ alguspunktis asub keha massiga m. Lahtise hulga $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ igas punktis p on määratud vektor, mis näitab, milline on selle keha poolt tekitatud külgetõmbejõud (eeldusel, et punktis p asub keha massiga 1). Vektor on rakendatud punktist p, suunatud alguspunkti poole, ja tema pikkus on $\frac{km}{r^2}$, kus r on punkti p kaugus alguspunktist (vt joonis 14) ja k on gravitatsioonikonstant. Ruumi $\mathbb{R}^3$ ristkoor-



Joonis 14: Gravitatsiooniväli

Home Page
Page 81 of 182
Go Back
Full Screen
Close
Quit

dinaatides gravitatsioonivälja poolt tekitatud vektorvälja X kuju on

$$X = \frac{-k\, m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Definitsioon 2.4.9. Olgu $X \in \mathcal{D}(U)$ vektorväli. Vektorvälja X *integraaljooneks* nimetatakse (siledat) parameetrilist joont $\alpha : (a, b) \to U$, mis rahuldab tingimust

$$\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t)). \tag{2.4.11}$$

Kui $\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)), X(x) = \big(x; X^1(x), X^2(x), \ldots, X^n(x)\big)$, siis tingimuse (2.4.11) kuju ruumi $\mathbb{R}^n$ koordinaatides on järgmine

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= X^1\big(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)\big), \\ \dot{x}^2(t) &= X^2\big(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)\big), \\ &\ldots \\ \dot{x}^n(t) &= X^n\big(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)\big). \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Kui integraaljoon läbib punkti $p = (p^1, p^2, \ldots, p^n)$, siis peab olema täidetud $\alpha(0) = p$ või $x^i(0) = p^i$. Oletame, et vektorväli on antud ja meie eesmärk on leida selle vektorvälja integraaljoone, mis läbib ette antud punkti p. Sellise integraaljoone leidmiseks tuleb leida diferentsiaalvõrrandisüsteemi (2.4.12) lahend $(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$, mis rahuldab algtingimusi $x^i(0) = p^i$. Võrranduiüsteemis $X^1, X^2, \ldots, X^n$ on antud funktsioonid ja $x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)$ on tundmatud funktsioonid. Meenutame diferentsiaalvõrrandisüsteemi lahendi olemasolu teoreemi.

Teoreem 2.4.10. *Olgu*

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, x^2, \dots, x^n), \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.4.13}$$

harilik diferentsiaalvõrrandisüsteem, kus iga funktsioon f^i *on klassi* C^r *funktsioon lahtisel hulgal* $U_\epsilon = I_\epsilon \times U, I_\epsilon = \{t : |t| < \epsilon\}, U \subset \mathbb{R}^n$. *Iga* $x \in U$ *korral leidub selle punkti ümbrus* $V \subset U$ *ja* $\delta > 0$ *sellised, et*

- *suvalise punkti* $p = (p^1, p^2, \dots, p^n) \in V$ *korral eksisteerib diferentsiaalvõrrandisüsteemi (2.4.13) lahend*

$$x^1(t) = \varphi^1(t),\ x^2(t) = \varphi^2(t),\ \dots, x^n(t) = \varphi^n(t), \tag{2.4.14}$$

  kus $\varphi^i(t)$ *on klassi* C^{r+1} *funktsioonid vahemikul* $I_\delta = \{t : |t| < \delta\}$;

- *lahend (2.4.14) rahuldab algtingimusi*

$$\varphi^1(0) = p^1,\ \varphi^2(0) = p^2,\ \dots, \varphi^n(0) = p^n; \tag{2.4.15}$$

- *iga* $p \in V$ *korral lahend (2.4.14) on määratud üheselt selles mõttes, et, kui funktsioonid* $\tilde{\varphi}^i(t)$ *on diferentsiaalvõrrandisüsteemi (2.4.13) lahend, mis rahuldab algtingimusi (2.4.15), siis funktsioonide* $\tilde{\varphi}^i(t)$ *määramispiirkond on* $I_{\delta'} \subset I_\delta$ *ja* $\varphi^i(t)\big|_{I_{\delta'}} \equiv \tilde{\varphi}^i(t)$;

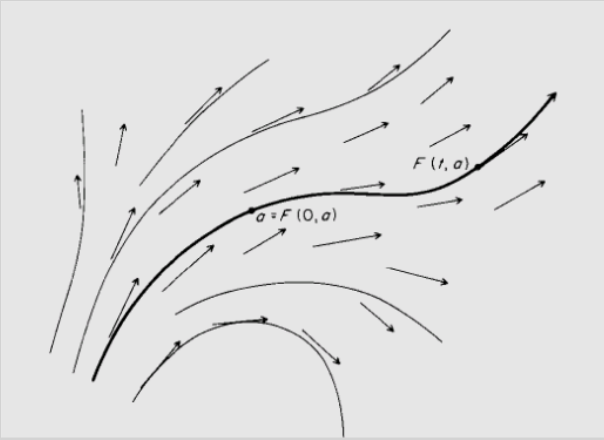
- *kuna iga* $p \in V$ *korral eksisterrib üks ja ainult üks lahend*

$$\{x^1(t) = \varphi^1(t),\ x^2(t) = \varphi^2(t),\ \dots, x^n(t) = \varphi^n(t)\},$$

on määratud funktsioonid

$$\varphi^i(t, p^1, p^2, \ldots, p^n) : I_\delta \times V \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},$$

mis on klassi C^r funktsioonid, st iga i korral $\varphi^i(t,p) \in C^r(I_\delta \times V)$.



Joonis 15: Vektorvälja integraaljooned

Näeme, et vektorvälja X integraaljoonte diferentsiaalvõrrandisüsteem (2.4.12) on süsteemi (2.4.13) erijuht, st vektorvälja koordinaatfunktsioonid ei sõltu parameetrist t. Parameetrit t tavaliselt nimetatakse ajaks, diferentsiaalvõrrandisüsteemi

(2.4.13) dünaamiliseks võrrandisüsteemiks ja selle lahendit liikumiseks. Diferentsiaalvõrrandisüsteemi (2.4.12) kohta öeldakse, et ta määrab keskkonna statsionaarset liikumist (kiirusvektorid ei sõltu ajast). Seega, teoreemist 2.4.10 järeldub

Teoreem 2.4.11. *Kui X on vektorväli hulgal $U \subset \mathbb{R}^n$, siis iga $x \in U$ korral leidub x-i ümbrus V ja $\delta > 0$ sellised, et*

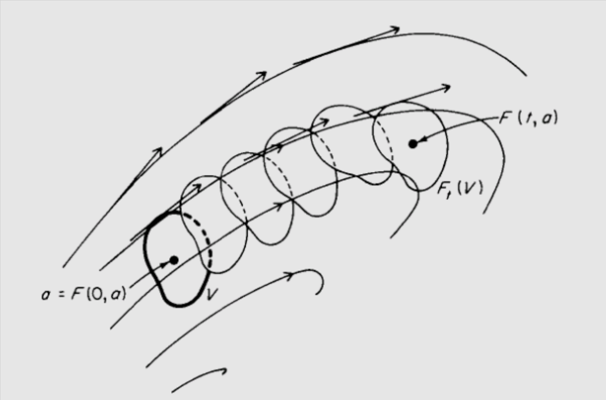
- *suvalise $p \in V$ korral eksisteerib üks ja ainult üks vektorvälja X (sile) integraaljoon $F(t) : I_\delta \to V$, mis läbib punkti p parameetri väärtusel $t = 0$, st $F(0) = p$;*
- *arvestades integraaljoone sõltuvust punktist p, saame kujutuse $F(t,p) : I_\delta \times V \to U$, mis on sile kujutus.*

Kujutust $F(t,p)$ mõnikord nimetatakse vooks selles mõttes, et integraaljoontega on määratud hulga V punktide liikumine hulgas U, st punkt, mille asukoht ajahetkel $t = 0$ on p, aja t jooksul nihkub punkti $F(t,p)$. Selle liikumise trajektoor on integraaljoon, ja liikumise hetkkiirus igas punktis on võrdne vektorvälja X väärtusega selles punktis.

Näide 2.4.12. Kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^3$ ristkoordinaatidega x, y, z on antud vektorväli

$$X = (y+z)\frac{\partial}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.4.16}$$

Leiame vektorvälja X integraaljooned. Diferentsiaalvõrrandisüsteem integraal-



Joonis 16: Integraaljoonte voog

joonte leidmiseks on

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + z, \\ \dot{y} &= z + x, \\ \dot{x} &= x + y. \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Lahendi otsime kujul $x = k_1\, e^{\lambda t}, y = k_2\, e^{\lambda t}, z = k_3\, e^{\lambda t}$. Asendades diferentsiaalvõrrandisüsteemi (2.4.17) saame lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} \lambda\, k_1 - k_2 - k_3 &= 0, \\ -k_1 + \lambda\, k_2 - k_3 &= 0, \\ -k_1 - k_2 + \lambda\, k_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Homogeensel lineaarvõrrandisüsteemil on mittetriviaalseid lahendeid, kui tema maatriksi determinant on null, st

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\,\lambda - 2 = 0. \quad \text{(karakteristlik võrrand)}$$

Karakteristlikul võrrandil on järgmised lahendid $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Kui $\lambda = \lambda_1 = 2$, siis lineaarvõrrandisüsteemi (2.4.18) astak on kaks (kaks sõltumatud võrrandit) ja lahend on $k_1 = k_2 = k_3$. Seega, tähistades $C_1 = k_1 = k_2 = k_3$, saame esimese lahendi

$$x = C_1\, e^{2t}, \;\; y = C_1\, e^{2t}, \;\; z = C_1\, e^{2t}.$$

Analoogiliselt, kui $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, võrrandisüsteemi (2.4.18) astak on 1 (üks sõltumatu võrrand $k_1 + k_2 + k_3 = 0$), ja lahend on

$$x = C_2\, e^{-t}, \;\; y = C_3\, e^{-t}, \;\; z = (-C_2 - C_3)\, e^{-t}.$$

Kuna üldlahend on eespool leitud lahendite summa, diferentsiaalvõrrandisüsteemi (2.4.17) üldlahend on

$$\begin{aligned} x &= C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-t}, \\ y &= C_1\, e^{2t} + C_3\, e^{-t}, \\ z &= C_1\, e^{2t} - C_2\, e^{-t} - C_3\, e^{-t}, \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

kus C_1, C_2, C_3 on konstandid. Oletame, et integraaljoon läbib punkti $p = (p^1, p^2, p^3)$, st diferentsiaalvõrrandisüsteem on süsteem algtingimustega

$$x(0) = p^1, y(0) = p^2, z(0) = p^3.$$

Seega,

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= p^1, \\ C_1 + C_3 &= p^2, \\ C_1 - C_2 - C_3 &= p^3. \end{aligned}$$

Siit leiame

$$x = \frac{1}{3}(e^{2t} + 2\, e^{-t})\, p^1 + \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})\, p^2 + \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})\, p^3,$$

$$y = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})\, p^1 + \frac{1}{3}(e^{2t} + 2\, e^{-t})\, p^2 + \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})\, p^3,$$
$$z = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})\, p^1 + \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})\, p^2 + \frac{1}{3}(e^{2t} + 2\, e^{-t})\, p^3.$$

Vektorvälja X integraaljoon, mis läbib punkti p, on leitud. Integraaljoonte voog on kujutus $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mille kirjutame maatrikskujul

$$F(t,p) = A(t) \cdot p, \tag{2.4.20}$$

kus

$$F(t,p) = \begin{pmatrix} F^1(t,p) \\ F^2(t,p) \\ F^3(t,p) \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix},$$

ja $A(t)$ on kolmandat järku maatriks

$$A(t) = \frac{1}{3} e^{2t}\, G + \frac{1}{3} e^{-t}\, H,$$

kus

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valem (2.4.20) näitab, et integraaljoonte voog $F(t,p)$ määrab üheparameetrilist (parameetriks on t) ruumi $\mathbb{R}^3$ lineaarteisenduste peret (iga kolmandat järku maatriks määrab ruumi $\mathbb{R}^3$ lineaarteisendust). Osutub, et maatriksite üheparameetriline pere $A(t)$ on rühm, st kujutus $A : t \in \mathbb{R} \to A(t) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ on homomorfism ehk kehtib $A(t+\tau) = A(t)\cdot A(\tau)$ ja $A(0) = I$, kus I on kolmandat järku ühikmaatriks. Tõepoolest, on lihtne veenduda, et maatriksite G, H korral kehtib

$$G^2 = 3\,G, \quad G\cdot H = H\cdot G = 0, \quad H^2 = 3\,H,$$

kust kohe järeldub $A(t+\tau) = A(t)\cdot A(\tau)$. Juhime tähelepanu, et kujutus A on sile, seega, A on sile joon rühmal $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ja teda nimetatakse $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$-i üheparameetriliseks alamrühmaks (kommutatiivne).

2.5. Teoreem pöördfunktsioonist

Definitsioon 2.5.1. Olgu $U, V \subset \mathbb{R}^n$ lahtised hulgad. Kujutust $F : U \to V$ nimetame C^r-*difeomorfismiks* (*diffeomorphism*), kui

- F on homöomorfism;
- F on klassi C^r kujutus;
- F^{-1} on klassi C^r kujutus.

Kui $r = \infty$, siis kujutust F nimetame difeomorfismiks.

Brouweri teoreemist järeldub, et lahtine hulk $U \subset \mathbb{R}^n$ ei saa olla difeomorfne lahtise hulgaga $V \subset \mathbb{R}^m$, kui $m \neq n$. Teine märkus seisneb selles, et definitsiooni teisest tingimusest kolmas ei järeldu, st kui F on klassi C^r, siis F^{-1} ei pea olema sama klassi kujutus. Tõepoolest, funktsioon $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = x^3$ on bijektsioon (kujutuse mõttes) ja lõpmata diferentseeruv, kuid pöördfunktsioon $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ ei ole diferentseeruv punktis $y = 0$, kuna selles punktis tema tuletis $(\sqrt[3]{y})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$ ei ole määratud.

Näide 2.5.2. Olgu $\mathbf{v} = (v^1, v^2, \dots, v^n)$ vektor. Kujutust $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, F(x) = x + \mathbf{v}$ või

$$F(x^1, x^2, \dots, x^n) = (x^1 + v^1, x^2 + v^2, \dots, x^n + v^n),$$

nimetame paralleellükkeks. On ilmne, et paralleelüke F on bijektsioon, pöörd-kujutus on $F^{-1}(x) = x - \mathbf{v}$. Paralleelüke F on pidev kujutus, pöördkujutus F^{-1} on ka pidev, seega F on homöomorfism. Jacobi maatriks on ühikmaatriks, st $DF(x) = I$, seega F on sile kujutus ja tema pöördkujutus o ka sile. Järelikult paralleelüke on difeomorfism.

Näide 2.5.3. Olgu $A = (a_{ij})$ n-järku ruutmaatriks. Defineerime kujutust $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ valemiga

$$F(x^1, x^2, \dots, x^n) = (\sum_{i=1}^{n} a_{1i} x^i, \sum_{i=1}^{n} a_{2i} x^i, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{ni} x^i),$$

või maatrikskujul $F(x) = A \cdot x$. Kujutust F nimetatakse ruumi $\mathbb{R}^n$ lineaarteisenduseks. Lineaaralgebras näidatakse, et regulaarse maatriksi A korral ($\det(A) \neq 0$) kujutus F on bijektsioon ja pöördkujutus $F^{-1}(x) = A^{-1} \cdot x$. Lineaarteisenduse Jacobi maatriks on A, st $DF(x) = A$, ja $DF^{-1}(x) = A^{-1}$. Seega, nii kujutus F, kui ka pöördkujutus on siledad kujutused, ja F on difeomorfism.

Lause 2.5.4. *Olgu U, V, W ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtised hulgad, $F : U \to V$, $G : V \to W$ peale kujutused ja $H = G \circ F : U \to W$ nende korrutis. Kui kaks kujutust kolmest F, G, H on difeomorfismid, siis kolmas on ka difeomorfism.*

Teoreem 2.5.5. `(Teoreem pöördfunktsioonist)` *Olgu $W \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk ja $F : W \to \mathbb{R}^n$ klassi C^r kujutus ($r = 1, 2, \dots, \infty$). Kui kujutuse F Jacobi* *maatriks DF on regulaarne punktis $p \in W$, st $\det(DF(p)) \neq 0$, siis leidub punkti p ümbrus $U \subset W$ selline, et $V = F(U)$ on lahtine hulk ja $F: U \to V$ on klassi C^r difeomorfism. Kui $x \in U, y = F(x) \in V$, siis kehtib*

$$DF^{-1}(y) = (DF(x)\Big|_{x=F^{-1}(y)})^{-1}.$$

Järgnevas vektorväljade uurimisel sageli kasutame järgmist teoreemi:

Teoreem 2.5.6. (`Eralduvusteoreem`) *Olgu $F \subset \mathbb{R}^n$ kinnine hulk ja $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktne hulk, kusjuures $F \bigcap K = \emptyset$. Leidub lõpmata diferentseeruv (st C^∞-klassi) funktsioon $f: \mathbb{R}^n \to [0,1]$ selline, et*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{kui } x \in K, \\ 0 & \textit{kui } x \in F. \end{cases}$$

Tõestus. Meenutame, et funktsioon

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{kui } t > 0, \\ 0 & \text{kui } t \leq 0, \end{cases}$$

on lõpmata diferentseeruv (sile), kuid punktis $t = 0$ ta ei ole analüütiline funktsioon. Suvalise $t \in \mathbb{R}$ korral funktsiooni h tuletised on pidevad funktsioonid ja on määratud valemiga

$$h^{(n)}(t) = \begin{cases} \frac{p_n(t)}{x^{2n}}\, h(t) & \text{kui } t > 0, \\ 0 & \text{kui } t \leq 0, \end{cases}$$

kus $p_n(t)$ on astme $n-1$ polünoom, mis on määratud rekursiivse valemiga

$$p_1(t) = 1, \;\; p_{n+1}(t) = t^2\, p_n'(t) - (2nt - 1)\, p_n(t).$$

Olgu $B_\epsilon(0)$ lahtine kera raadiusega $\epsilon > 0$ ja keskpunktiga ruumi $\mathbb{R}^n$ alguspunktis. Olgu $\delta = \epsilon/2$. Kasutades funktsiooni $h(t)$ konstrueerime sellise lõpmata diferentseeruva funktsiooni $g : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, et

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{kui } x \in B_\delta(0), \\ 0 & \text{kui } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0). \end{cases}$$

Funktsiooni g defineerime valemiga

$$g(x) = \frac{h(\epsilon^2 - ||x||^2)}{h(\epsilon^2 - ||x||^2) + h(||x||^2 - \delta^2)}. \tag{2.5.1}$$

Näitame, et g on sile funktsioon. Kui me näitame, et valemis (2.5.1) lugeja ja nimetaja on siledad funktsioonid, kusjuures nimetaja on nullist erinev ruumi $\mathbb{R}^n$ igas punktis, siis sellega meie näitame, et g on sile funktsioon. On ilmne, et $h(\epsilon^2 - ||x||^2)$ on sile funktsioon, kuna ta on siledate funktsioonide kompositsioon (liitfunktsioon). Tõepoolest, $h(\epsilon^2 - ||x||^2) = h \circ \sigma(x)$, kus

$$\sigma(x) = \epsilon^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - \ldots - (x^n)^2.$$

Analoogiliselt saab näidata, et nimetaja on sile funktsioon, kuna ta on siledate funktsioonide summa. Nüüd näitame, et nimetaja on nullist erinev igas $\mathbb{R}^n$ punktis. Kehtib

$$\begin{cases} h(\epsilon^2 - ||x||^2) = 0 & \text{kui } ||x|| \geq \epsilon, \\ h(||x||^2 - \delta^2) = 0 & \text{kui } ||x|| \leq \delta = \frac{\epsilon}{2}. \end{cases}$$

Seega suvalise $x \in \mathbb{R}^n$ kehtib $h(\epsilon^2 - ||x||^2) + h(||x||^2 - \delta^2) \neq 0$ ja g on sile funktsioon. Nüüd, mittenegatiivsete reaalarvude hulka jaotame kolmeks alamhulgaks: $0 \leq ||x|| < \delta$, $\delta \leq ||x|| < \epsilon$, $\epsilon \leq ||x|| < \infty$. Antud jaotus on samaväärne ruumi $\mathbb{R}^n$ jaotusega: $x \in B_\delta(0)$, $x \in B_\epsilon(0) \setminus B_\delta(0)$, $\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)$. Kehtib

$$0 \leq ||x|| < \delta \Leftrightarrow \ x \in B_\delta(0) \Leftrightarrow \ h(||x||^2 - \delta^2) = 0 \Leftrightarrow \ g(x) = \frac{h(\epsilon^2 - ||x||^2)}{h(\epsilon^2 - ||x||^2)} = 1,$$

$$\delta \leq ||x|| < \epsilon \Leftrightarrow \ x \in B_\epsilon(0) \setminus B_\delta(0) \Leftrightarrow \ 0 < g(x) \leq 1,$$

$$\epsilon \leq ||x|| < \infty \Leftrightarrow \ x \in \mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0) \Leftrightarrow \ h(\epsilon^2 - ||x||^2) = 0 \Leftrightarrow \ g(x) = 0.$$

Seega

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{kui } x \in B_\delta(0), \\ 0 & \text{kui } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0). \end{cases}$$

On lihtne veenduda, et suvalise $p \in \mathbb{R}^n$ kehtib

$$\tilde{g}(x) = g(x - p) = \begin{cases} 1 & \text{kui } x \in B_\delta(p), \\ 0 & \text{kui } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(p). \end{cases}$$

Nüüd meenutame, et F on kinnine ja K on kompaktne, kusjuures $F \bigcap K = \emptyset$. Alati leiduvad punktid $p_1, p_2, \ldots, p_N$ ja arvud $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N$ (kus N on lõplik) sellised, et

$$K \subset \bigcup_i B_{\delta_i}(p_i), \quad \delta_i = \frac{\epsilon_i}{2}$$

ja

$$\left(\bigcup_i B_{\epsilon_i}(p_i) \right) \bigcap F = \emptyset.$$

Olgu $\tilde{g}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funktsioon eespool kirjeldatud omadustega, st

$$\tilde{g}_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{kui } x \in B_{\delta_i}s(p_i), \\ 0 & \text{kui } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{\epsilon_i}(p_i). \end{cases}$$

Funktsiooni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ määrame valemiga

$$f(x) = 1 - \Pi_{i=1}^N (1 - \tilde{g}_i(x)).$$

Kehtib $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{kui } x \in K, \\ 0 & \text{kui } x \in F. \end{cases} \qquad \blacktriangle$$

Järeldus. Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$, $p \in U$ ja $f : U \to \mathbb{R}$ sile funktsioon. Leidub punkti p ümbrus $V \subset U$ ja sile funktsioon $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ selline, et

$$f^*\Big|_V \equiv f, \quad f^*\Big|_{F\setminus U} \equiv 0.$$

3. Diferentseeruvad muutkonnad ja alammuutkonnad

3.1. Diferentseeruva muutkonna mõiste

Olgu M topoloogiline n-muutkond ja $(U,\phi),(V,\psi)$ selle muutkonna lokaalsed kaardid, kusjuures $U\bigcap V\neq\emptyset$. Meenutame, ϕ,ψ on homöomorfismid. Kui $p\in U\bigcap V$, siis on määratud punkti p lokaalsed koordinaadid

$$\begin{aligned}\phi(p) &= (x^1(p),x^2(p),\dots,x^n(p))\in\mathbb{R}^n,\\ \psi(p) &= (y^1(p),y^2(p),\dots,y^n(p))\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}\qquad(3.1.1)$$

Kuidas punkti p ühed lokaalsed koordinaadid avalduvad teiste lokaalsete koordinaatide kaudu? Kuna ϕ,ψ on homöomorfismid, meil on määratud järgmised kujutused:

$$\psi\circ\phi^{-1}:\phi(U\bigcap V)\to\psi(U\bigcap V),\quad \phi\circ\psi^{-1}:\psi(U\bigcap V)\to\phi(U\bigcap V).\quad(3.1.2)$$

On ilmne, et eespool defineeritud kujutused $\psi\circ\phi^{-1},\phi\circ\psi^{-1}$ on ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtiste hulkade $\phi(U\bigcap V)$ ja $\psi(U\bigcap V)$ homöomorfismid, kusjuures nad on teineteise pöördkujutused. Kirjutame komponentides:

$$\psi\circ\phi^{-1}\ :\ y^i=h^i(x^1,x^2,\dots,x^n),\ i=1,2,\dots,n\qquad(3.1.3)$$

$$\phi\circ\psi^{-1}\ :\ x^i=g^i(y^1,y^2,\dots,y^n),\ i=1,2,\dots,n.\qquad(3.1.4)$$

Järelikult, iga i korral funktsioonid h^i, g^i on pidevad funktsioonid ja kehtivad samasused:

$$h^i\big(g^1(y), g^2(y), \ldots, g^n(y)\big) \equiv y^i, \tag{3.1.5}$$
$$g^i\big(h^1(x), h^2(x), \ldots, h^n(x)\big) \equiv x^i. \tag{3.1.6}$$

Meenutame, et funktsioone h^i, g^i nimetatakse üleminekufunktsioonideks. Diferentseeruva muutkonna idee seisneb selles, et topoloogilise muutkonna kaartide abil konstrueerida atlase, mille kõik üleminekufunktsioonid on diferentseeruvad.

Definitsioon 3.1.1. Olgu $(U, \phi), (V, \psi)$ topoloogilise n-muutkonna M lokaalsed kaardid. Kahte kaarti $(U, \phi), (V, \psi)$ nimetame C^∞-*kooskõlalisteks*, kui tingimusest $U \bigcap V \neq \emptyset$ järeldub, et üleminekufunktsioonid $h^i(x), g^j(y)$ on lõpmata diferentseeruvad, st nad on klassi C^∞ funktsioonid ehk siledad funktsioonid. Viimane tingimus on samaväärne sellega, et kujutused $\psi \circ \phi^{-1}, \phi \circ \psi^{-1}$ on ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtiste hulkade $\phi(U \bigcap V)$ ja $\psi(U \bigcap V)$ difeomorfismid.

Definitsioon 3.1.2. *Diferentseeruvaks struktuuriks* või C^∞-struktuuriks (siledaks struktuuriks, *smooth structure*) topoloogilisel n-muutkonnal M nimetatakse lokaalsete kaartide kogumit $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, kui on täidetud järgmised tingimused:

i) $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, st $\{U_\alpha\}$ on muutkonna M kate;

ii) iga α, β korral lokaalsed kaardid $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$ on C^∞-kooskõlalised;

iii) kui (V, ψ) on topoloogilise muutkonna M lokaalne kaart, mis on C^∞-kooskõlaline kogumi $\mathfrak{U}$ iga kaardiga, siis $(V, \psi) \in \mathfrak{U}$.

Topoloogilise n-muutkonna M temal määratud diferentseeruva struktuuriga $\mathfrak{U}$ nimetatakse *diferentseeruvaks (siledaks) n-muutkonnaks* (*smooth manifold*).

Seoses eespool antud definitsiooniga, kerkivad järgmised küsimused. Kas leidub topoloogiline muutkond, millel ei ole võimalik konstrueerida diferentseeruva struktuuri selle muutkonna lokaalsete kaartide abil? Teiste sõnadega, kas leidub topoloogiline muutkond selline, et temal ei eksisteeri ühtegi diferentseeruvat struktuuri? On mõeldav ka situatsioon, kus topoloogilisel muutkonnal eksisteerib diferentseeruv struktuur ja isegi mitte ainult üks, vaid eksisteerib mitu mitteekvivalentset struktuuri. Need küsimused on tähtsad ja fundamentaalsed, kuid rasked ja lõplikut vastust veel ei ole. See on aktuaalne ja kiiresti arenev kaasaegse matemaatika valdkond. Siin meie ainult mainime, et pikaajalise periodi jooksul arvati, et topoloogilisel muutkonnal alati eksisteerib ainult üks diferentseeruv struktuur (difeomorfismi täpsusega). Suureks üllatuseks oli 1956. aastal ilmunud J. W. Milnor'i artikkel ([10]), kus ta näitas, et sfääril S^7 eksisteerib mitu erinevat diferentseeruvat struktuuri. Hiljem M.A. Kervair ja J.W. Milnor leidsid, kui palju on mitteekvivalentset diferentseeruvat struktuuri sfääril dimensiooniga alates 5 kuni 16 (vt allpool asuvas tabelis).

Mitteekvivalentsete diferentseeruvate struktuuride arv m sfääril S^n																
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	1

Kervair konstrueeris topoloogilist muutkonda dimensiooniga 10, millel ei eksisteeri ühtegi diferentseeruvat struktuuri. On huvitav mainida, et, kui $n \neq 4$, siis eukleidilisel ruumil $\mathbb{R}^n$ on olemas ainult kanooniline (harilik) diferentseeruv struktuur, kuid dimensioonis 4 peale kanoonilist diferentseeruvat struktuuri eukleidilisel ruumil $\mathbb{R}^4$ eksisteerivad ka teised, kanoonilise struktuuriga mitteekvivalentsed struktuurid, neid nimetatakse eksootilisteks defirentseeruvateks struktuurideks. Eksootilise diferentseeruva struktuuri olemasolu neljamõõtmelise ruumi $\mathbb{R}^4$ korral järeldub S. Donaldsoni teoreemidest ([8]) ja nende avastamine oli suureks üllatuseks.

Tegelikult, lähtudes diferentseeruva muutkonna definitsioonist võib näidata, et definitsiooni tingimused i ja ii on olulised, kuid viimane tingimus (atlase maksimaalsus) on rohkem teoreetilise iseloomuga, st kui mingi atlas (kaartide arv on lõplik) on konstrueeritud, siis muutkonna diferentseeruv struktuur on sellega üheselt määratud, kuna meie võime formaalselt täiendada konstrueeritud atlast kõikvõimalikute kaartidega.

Teoreem 3.1.3. *Olgu M topoloogiline n-muutkond. Kui $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ on muutkonna M atlas, mis koosneb C^∞-kooskõlalistest lokaalsetest kaartidest, siis muutkonnal M eksisteerib üks ja ainult üks diferentseeruv struktuur, mis sisaldab atlast $\mathfrak{U}$.*

Näide 3.1.4. Olgu E^2 eukleidiline tasand ristkoordinaatteljestikuga $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ja vastavatega ristkoordinaatidega x, y. Kui p on tasandi suvaline punkt, siis on määratud punkti p ristkoordinaadid $x(p), y(p)$ ja, seega, meil on määratud kujutus $\psi : E^2 \to \mathbb{R}^2$. On ilmne, et ψ on homöomorfism (isegi isomeetria). Seega, eukleidiline tasand on kaetud ühe koordinaadikaardiga (V, ψ), kus $V = E^2, \psi(p) = (x(p), y(p))$. ja Teoreemi (3.1.3) tõttu meil on määratud diferentseeruv struktuur. Seega, E^2 on diferentseeruv muutkond.

Olgu $\{O^*; \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*\}$ eukleidilise tasandi mingi teine ristreeper ja vastavad ristkoordinaadid on x^*, y^*. Seega, meil on määratud teine koordinaadikaart (V, ψ) eukleidilisel tasandil, kus $V = E^2$ ja $\psi(p) = (x^*(p), y^*(p))$. Juhime tähelepanu sellele, et kaart (V, ψ) erineb eespool defineeritud kaardist, kuna kujutused ϕ ja ψ on erinevad. Teame, et leidub nurk θ nii, et

$$\begin{aligned} x &= x^* \cos\theta - y^* \sin\theta + h^1 \\ y &= x^* \sin\theta + y^* \cos\theta + h^2. \end{aligned}$$

Järelikult, üleminekufunktsioonid on lõpmata diferentseeruvad ja kaardid (V, ϕ) ja (V, ψ) on C^∞-kooskõlalised ja teine kaart kuulub esimese kaardi poolt määratud diferentseeruvasse struktuuri.

Olgu $U \subset E^2$ eukleidilise tasandi lahtine alamhulk, kus $U = E^2 \setminus L$ ja L on punktist O lähtuv kiir. Olgu $p \in U$, r punkti p kaugus punktini O, θ nurk lõigu Op ja kiire L vahel (kiirt L pöörame ümber punkti O kellaosuti liikumisele vastupidises suunas niikaua, kui ta ühtib lõiguga Op). Seega, meil on määratud koordinaadikaart (U, ξ), kus

$$\xi(p) = (r(p), \theta(p)) : U \to \mathbb{R}^2, \xi(U) = \{(r, \theta) : 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2,$$

ja ξ on homömorfism. On ilmne, et $r(p), \theta(p)$ on punkti p polaarkoordinaadid. Kui kiireks L valime x-telge, siis

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

ja üleminekufunktsioonid näitavad, et kaart (U, ξ) on C^∞-kooskõlaline kaardiga (V, ϕ). Seega, tegemist on ühe ja sama diferentseeruva struktuuriga.

Näide 3.1.5. On lihtne näidata, et diferentseeruva n-muutkonna M iga lahtine alamhulk U on diferensteeruv n-muutkond. Tõepoolest, hulga U atlase $\{(V^*,\phi^*)\}$ konstrueerime järgmiselt: kui (V,ϕ) on muutkonna M lokaalne kaart selline, et $V\bigcap U\neq\emptyset$, siis kaardi (V^*,ϕ^*) defineerime valemitega

$$V^*=V\bigcap U,\ \ \phi^*=\phi\Big|_{V^*}.$$

On ilmne, et $\{V^*\}$ on U kate, kaardid $\{(V^*,\phi^*\})$ on C^∞-kooskõlalised ja, seega, meil on konstrueeritud diferentseeruv struktuur hulgal U, mille suhtes ta on diferentseeruv n-muutkond.

Olgu $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ ristkülikmaatriks. Defineerime kujutust $\phi:\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{kn}$ valemiga

$$\phi(A)=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n},a_{21},a_{22}\ \dots,a_{2n},\dots,a_{kn}).$$

Kujutus ϕ on bijektsioon, ja kasutades kujutust ϕ, meie võime defineerida hulgal $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ topoloogiat (mille suhtes ϕ on homöomorfism) ja diferentseeruvat struktuuri, mis on määratud ühe kaardiga $(\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R}),\phi)$. Seega, $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ on diferentseeruv kn-muutkond.

Meenutame, et regulaarsete n-maatriksite hulk on

$$\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}):\det(A)\neq 0\}.$$

Determinant $\det:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ on reaalväärtustega funktsioon n-järku ruutmaatriksite hulgal, kusjuures definitsiooni kohaselt ta sõltub maatriksi A elementidest a_{ij} polünomiaalselt, st

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{p(\sigma)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

kus $\sigma = (i_1\, i_2\, \dots\, i_n)$ on permutatsioon, $p(\sigma)$ on permutatsiooni paarsus ja S_n on n elementidest permutatsioonide rühm. Järelikult, det on pidev funktsioon ja $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on lahtine alamhulk. Kuna $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on diferentseeruv n^2-muutkond, siis $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ on ka diferentseeruv n^2-muutkond. Seega,

$\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ `on diferentseeruv` n^2`-muutkond`.

Antud näide on tähtis selle pärast, et $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ on rühm, kus rühma tehteks on maatrikskorrutamine. Seega, meil on kaks struktuuri, kus üheks on diferentseeruva muutkonna struktuur ja teiseks on rühma struktuur. Kui need struktuurid on omavahel kooskõlas, st rühma tehe $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ on diferentseeruv kujutus muutkonna diferentseeruva struktuuri suhtes, siis $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ nimetame *Lie rühmaks*[2].

Teoreem 3.1.6. *Olgu M, N diferentseeruvad muutkonnad, $\dim M = m$, $\dim N = n$. Otsekorrutis $M \times N = \{(p, q) : p \in M,\ q \in N\}$ on diferentseeruv muutkond*

[2] `Marius Sophus Lie (1842 - 1899)`, Norra matemaatik, lõpetas Oslo ülikooli, kaitses doktorikraadi sama ülikooli juures

dimensiooniga $m+n$, kusjuures diferentseeruv struktuur $\mathfrak{U}$ on määratud koordinadikaartide kogumiga $(U\times V, \phi\times\psi)$, kus (U,ϕ) on muutkonna M lokaalne kaart, (V,ψ) on muutkonna N lokaalne kaart ja $\phi\times\psi(p,q) = (\phi(p),\psi(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}$.

Näide 3.1.7. On lihtne näidata, et ühikringjoon S^1 on ühedimensionaalne diferentseeruv muutkond. Ülalpool esitatud teoreemist järeldub, et toor $T^2 = S^1 \times S^1$ on diferentseeruv muutkond.

Näide 3.1.8. Esimeses osas (näide 1.2.4) oli näidatud, et sfäär on topoloogiline ühelisidus kompaktne muutkond. Tegelikult säär on diferentseeruv muutkond (ühelisidus ja kompaktne). Tõepoolest, sfääri üleminekufunktsioonid kaartide $(S^2_{x^3>0}, \phi_3^+), (S^2_{x^2>0}, \phi_2^+)$ korral on järgmised

$$\phi_2^+ \circ (\phi_3^+)^{-1} : \ \eta^1 = \xi^1, \ \ \eta^2 = \sqrt{1-(\xi^1)^2-(\xi^2)^2},$$

kus

$$\begin{aligned} \phi_3^+(S^2_{x^3>0} \bigcap S^2_{x^2>0}) &= \{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 < 1, \ \xi^2 > 0\}, \\ \phi_2^+(S^2_{x^3>0} \bigcap S^2_{x^2>0}) &= \{(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 < 1, \ \eta^2 > 0\}. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Üleminekufunktsioonid on diferentseeruvad eespool antud määramispiirkonnas ja, seega, sfäär on diferentseeruv muutkond. Tegelikult, see väide kehtib suvalises dimensioonis, st n-mõõtmeline sfäär on diferentseeruv muutkond.

Sfäär ja toor asuvad kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^3$. Kuna $\mathbb{R}^3$ on diferentseeruv muutkond, siis sfäär ja toor on alammuutkonnad (definitsiooni anname hiljem). Üldiselt, ruumi $\mathbb{R}^3$ diferentseeruvat 2-alammuutkonda nimetatakse pinnaks (*surface*) ja diferentseeruvat 1-alammuutkonda (kas $\mathbb{R}^2$ või $\mathbb{R}^3$) nimetatakse jooneks (*curve*). Jooned ja pinnad on klassikalise diferentsiaalgeomeetria uurimisobjektid.

Näide 3.1.9. Projektiivne ruum $P^n(\mathbb{R})$ on diferentseeruv n-muutkond. On võimalik näidata, kasutades esimeses osas konstrueeritud atlase abil (harjutusülesanne).

Näide 3.1.10. Grassmanni muutkond $G^{k,n}(\mathbb{R})$ on diferentseeruv $k(n-k)$-muutkond. Näidatakse eespool konstrueeritud atlase abil (harjutusülesanne).

3.2. Diferentseeruvad funktsioonid muutkonnal

Topoloogilise muutkonna korral meil on määratud selline mõiste, nagu pidev funktsioon topoloogilisel muutkonnal. Oletatavasti, diferentseeruva muutkonna korral on määratud diferentseeruva funktsiooni mõiste.

Olgu f funktsioon määramispiirkonnaga W_f, kus W_f on diferentseeruva muutkonna M lahtine alamhulk, st $W_f \subseteq M$. Seega, $f : W_f \to \mathbb{R}$. Olgu (U, ϕ) muutkonna M lokaalne kaart lokaalsete koordinaatidega $x^1, x^2, \ldots, x^n$ selline, et $W_f \bigcap U \neq \emptyset$. Funktsioon f tekitab n-muutuja funktsiooni $\hat{f} = f \circ \phi^{-1}$, mille määramispiirkond on $\phi(W_f \bigcap U) \subset \mathbb{R}^n$. Kehtib

$$f(p) = \hat{f}(x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p)) = \hat{f}(\phi(p)),\ p \in W_f \bigcap U.$$

Järgnevas meie tähistame nii funktsiooni f, kui ka tema poolt tekitatud n-muutuja funktsiooni $\hat{f}$, ühe ja sama tähega f (funktsioon $\hat{f}$ on funktsiooni

f avaldis kaardi lokaalsetes koordinaatides). Kui tegemist on kahe kaardiga $(U, \phi), (V, \psi)$, kus $W_f \bigcap U \bigcap V \neq \emptyset$, siis vastava kaardi koordinaatidega näitame, millise funktsiooniga tegemist on, st

$$f(p) = f(x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p)) = f(y^1(p), y^2(p), \ldots, y^n(p)).$$

Definitsioon 3.2.1. Funktsiooni $f : W_f \to \mathbb{R}$ nimetame C^∞-funktsiooniks (siledaks funktsiooniks, diferentseeruvaks funktsiooniks), kui suvalise $p \in W_f$ korral leidub muutkonna M lokaalne kaart (U, ϕ) selline, et $p \in U \bigcap W_f$ ja funktsioon $\hat{f} = f \circ \phi^{-1}$ on C^∞-funktsioon ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtisel alamhulgal $\phi(W_f \bigcap U)$.

Mainime, et vastavalt meie tähistustele x^i on nii muutuja, kui ka koordinaadifunktsioon, st kui koordinaadifunktsiooni teda määratakse valemiga $x^i(p) = \pi^i \circ \phi(p) : U \to \mathbb{R}$, kus $\pi^i(q^1, q^2, \ldots, q^n) = q^i$. On ilmne, et iga koordinaadifunktsioon on sile. Tõepoolest, kehtib

$$\begin{aligned} \hat{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) &= x^i \circ \phi^{-1}(x^1, x^2, \ldots, x^n) \\ &= (\pi^i \circ \phi) \circ \phi^{-1}(x^1, x^2, \ldots, x^n) = x^i. \end{aligned}$$

Lähtudes definitsioonist võime näidata, et kehtivad omadused:

1. kui $f : W_f \to \mathbb{R}$ on sile funktsioon ja $V \subset W_f$ on lahtine alamhulk, siis $f\Big|_V$ on sile funktsioon hulgal V;
2. kui $W_f = \bigcup_\alpha U_\alpha$ ja iga α korral f on sile funktsioon hulgal U_α, siis f on sile funktsioon hulgal W_f.

Definitsioon 3.2.2. Kujutust $F : W \to N$, kus $W \subseteq M$ ja M, N on diferentseeruvad muutkonnad, nimetatakse C^∞-kujutuseks (siledaks kujutuseks, diferentseeruvaks kujutuseks), kui iga $p \in W$ korral leiduvad lokaalsed kaardid $(U, \phi), U \subset M, (V, \psi), V \subset N, p \in U \subset W, F(p) \in V, F(U) \subset V$ sellised, et kujutus $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ on C^∞-kujutus.

Teoreem 3.2.3. *Olgu M diferentseeruv muutkond, $F \subset M$ kinnine alamhulk, $K \subset M$ kompaktne alamhulk, $F \bigcap K = \emptyset$. Leidub sile funktsioon $f : M \to [0, 1]$ selline, et hulga K igas punktis funktsiooni f väärtus on 1, st $f(x) \equiv 1$, kui $x \in K$, ja $F(x) \equiv 0$ kui $x \in F$.*

Teoreem 3.2.4. *Olgu U muutkonna M lahtine alamhulk, $p \in U$ ja $f : U \to \mathbb{R}$ sile funktsioon. Leidub punkti p ümbrus $V \subset U$ ja sile funktsioon $f^* : M \to \mathbb{R}$ sellised, et $f^*\Big|_V \equiv f$ ja $f^*\Big|_{M \setminus U} \equiv 0$.*

Definitsioon 3.2.5. Kujutust $F : M \to N$ nimetatakse difeomorfismiks, kui

1. F on homömorfism;
2. F on sile kujutus;
3. F^{-1} on sile kujutus.

Öeldakse, et muutkonnad M, N on difeomorfsed, kui leidub difeomorfism $F : M \to N$.

Näide 3.2.6. Olgu $\mathbb{R}$ diferentseeruv muutkond hariliku diferentseeruva struktuuriga, st $U = \mathbb{R}$ ja $\phi = \mathrm{id}_\mathbb{R}$. Tähistame $\phi(t) = \tau$, kus $t \in \mathbb{R}, \tau \in U$. Seega, τ on kaardiga (U, ϕ) määratud koordinaat. Olgu $V = \mathbb{R}$ ja $\psi(t) = t^3 = \sigma$. Järelikult, (V, ψ) on muutkonna $\mathbb{R}$ teine koordinaadikaart. Näitame, et kaardid (U, ϕ), (V, ψ) ei ole C^∞-kooskõlalised. Tõepoolest, üleminekufunktsioon on $\phi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja selle avaldus vastavates koordinaatides on $\tau = \sqrt[3]{\sigma}$. On ilmne, et üleminekufunktsioon on homöomorfism ja, seega, tegemist on ühe ja sama topoloogilise muutkonnaga. Kuid funktsioon $\tau = \sqrt[3]{\sigma}$ ei ole lõpmata diferentseeruv (ta isegi ei ole pidevalt diferentseeruv), kuna tuletis

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\sigma^2}}$$

ei ole pidev funktsioon punktsioon punktis $\sigma = 0$. Järelikult, meil on kaks erinevat diferentseeruvat struktuuri ühel ja samal topoloogilisel muutkonnal $\mathbb{R}$. On ilmne, et antud näide on lihtne ja vastavad struktuurid on difeomorfsed (ekvivalentsed). Tõepoolest, olgu $F : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$, kus $\mathbb{R}$ on $\mathbb{R}$ hariluku diferentseeruva struktuuriga ja $\tilde{\mathbb{R}}$ on $\mathbb{R}$ teise diferentseeruva struktuuriga, $F(t) = t^3$. Kirjutades kujutuse F vastavates koordinaatides saame $\phi \circ F \circ \psi^{-1} : \tau = F(\sqrt[3]{\sigma}) = (\sqrt[3]{\sigma})^3 = \sigma$, mis näitab, et F on difeomorfism.

Seega, ülalpool toodud näides ühel ja samal topoloogilisel muutkonnal on kaks diferentseeruvat struktuuri, mis ei ole C^∞-kooskõlalised, kuid nad on isomorfsed. Diferentseeruvate muutkondade teooria üheks fundamentaalküsimuseks on küsimus: kas ühel ja samal topoloogilisel muutkonnal (või homöomorfsetel muutkondadel) eksisteerivad erinevad mittedifeomorfsed diferentseeruvad struktuurid?

Lõpetame ühe kriteeriumiga. Olgu M diferentseeruv muutkond, $U \subset M$ lahtine alamhulk, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ homöomorfism. Paar (U, ϕ) on koordinaadikaart diferentseeruval muutkonnal M parajasti siis, kui $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ on difeomorfism. Järgnevas meie nimetame paari (V, ϕ^{-1}) muutkonna M *lokaalseks parametriseerimiseks* (inglise keeles kasutatakse terminit *patch*).

3.3. Kujutuse astak. Immersiooni mõiste

Olgu N, M diferentseeruvad muutkonnad, $F : N \to M$ diferentseeruv kujutus. Olgu $p \in N$, $F(p) \in M$ ja $(U, \phi), (V, \psi)$ lokaalsed kaardid vastavalt punkti p ja punkti $F(p)$ ümbruses, kusjuures $F(U) \subset V$. Kirjutades kujutuse F vastavate kaartide lokaalsetes koordinaatides, saame

$$\begin{aligned} y^1 &= \hat{f}^1(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ y^2 &= \hat{f}^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ &\dots \\ y^m &= \hat{f}^m(x^1, x^2, \dots, x^n), \end{aligned}$$

ehk

$$y^\alpha = \hat{f}^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad \alpha = 1, 2, \dots, m,$$

kus

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^m.$$

Definitsioon 3.3.1. Kujutuse F astakuks punktis $p \in M$ nimetame kujutuse $\hat{F}$ astakut punktis $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$ (Jacobi maatriksi $D\hat{F}(\phi(p))$ astakut) ja tähistame rank $F(p)$.

Seega, kujutuse F astak punktis p on Jacobi maatriksi $D\hat{F}(\phi(p))$ astak, st

$$\operatorname{rank} F(p) = \operatorname{rank}\Big(\frac{\partial \hat{f}^\alpha}{\partial x^i}\Big|_{\phi(p)}\Big).$$

On võimalik näidata, et kujutuse astak ei sõltu punktide p ja $F(p)$ lokaalsetest koordinaatidest. Osutub, et kehtib järgmine teoreem (ilma tõestuseta):

Teoreem 3.3.2. *(*`Teoreem kujutuse astakust`*) Olgu N, M diferentseeruvad muutkonnad, $\dim N = n$, $\dim M = m$ ja $F : N \to M$ diferentseeruv kujutus, mille astak muutkonna M igas punktis on $k \leq \min(n, m)$. Muutkonna N suvalise punkti $p \in N$ korral leiduvad punktide $p \in N$, $F(p) \in M$ koordinaatümbrused $(U, \phi), (V, \psi), F(U) \subset V$ sellised, et*

- *$\phi(p) = (0, 0, \ldots, 0)$ (n-korda), $\psi(F(p)) = (0, 0, \ldots, 0)$ (m-korda);*
- *kujutuse $\hat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$ kuju lokaalsetes koordinaatides on*

$$y^1 = x^1,\ y^2 = x^2,\ \ldots,\ y^k = x^k,\ y^{k+1} = 0,\ \ldots,\ y^m = 0,$$

- *$\phi(U) = C^n_\epsilon(0), \psi(V) = C^m_\epsilon(0)$, kus $\epsilon > 0$ ja $C^n_\epsilon(0), C^m_\epsilon(0)$ on kuubid, st nt*

$$C^n_\epsilon(0) = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : |x^i| < \epsilon\}.$$

Teoreemist järeldub, kui $F : N \to M$ on difeomorfism, siis $\dim N = \dim M$. Tõepoolest, oletame, et $\dim N \neq \dim M$, nt $m < n$. Sel juhul $k \leq \min(n, m) =$

$m < n$. Olgu koordinaatümbrused valitud nii, nagu teoreemis, siis kujutuse F kuju lokaalsetes koordinaatides on

$$y^1 = x^1,\ y^2 = x^2,\ \ldots,\ y^k = x^k,\ y^{k+1} = 0,\ \ldots,\ y^m = 0$$

ja hulga $\phi(U)$ kõikide punktide $(0, \ldots, 0, x^{k+1}, \ldots, x^n)$ kujutis on ruumi $\mathbb{R}^m$ alguspunkt, st $\hat{F}(0, \ldots, 0, x^{k+1}, \ldots, x^n) = 0$. Siit järeldub, et F ei saa olla bijektiivne isegi lokaalselt.

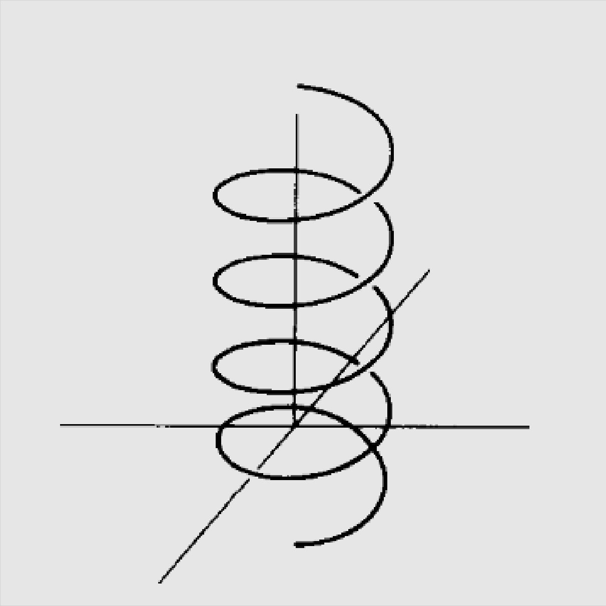
Definitsioon 3.3.3. Diferentseeruvat kujutust $F : N \to M$, kus N, M on diferentseeruvad muutkonnad, nimetatakse *immersiooniks* (*immersion*), kui rank $F = n = \dim N$. Diferentseeruvat kujutust $F : N \to M$ nimetatakse *submersiooniks* (*submersion*), kui rank $F = m = \dim M$. Kui F on injektiivne immersioon, mille abil kujutis $\tilde{N} = F(N) \subset M$ on varustatud topoloogiaga (mille suhtes F on homöomorfism) ja diferentseeruva struktuuriga (mille suhtes F on difeomorfism), siis kujutist $\tilde{N} \subset M$ nimetatakse muutkonna M *alammuutkonnaks* või immersiooni F poolt tekkitatud alammuutkonnaks (*submanifold*, *immersed submanifold*).

On ilmne, et immersiooni korral $\dim N \leq \dim M$ ja submersiooni korral $\dim N \geq \dim M$. Juhime tähelepanu sellele, et sisestatud alammuutkonna struktuur sõltub nii N, kui ka F, ja $\tilde{N}$ üldiselt ei pea olema M topoloogiline alamruum.

Näide 3.3.4. Olgu $N = \mathbb{R}, M = \mathbb{R}^3$. Kujutust $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ määratakse valemiga

$$F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t).$$

Kujutuse astak on konstantne ja on võrdne 1. Seega, F on immersioon. On lihtne veenduda, et F on injektiivne immersioon, seega kujutis $F(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$ on alammuutkond, mida nimetatakse *kruvijooneks(helix) (vt joonis 17).*

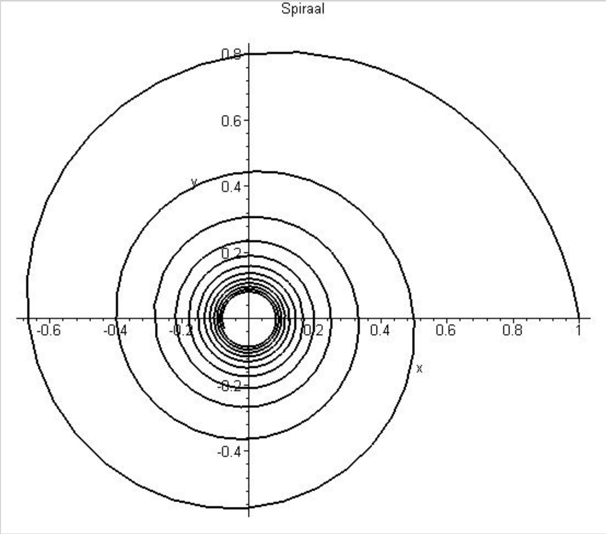


Joonis 17: Kruvijoon

Näide 3.3.5. Olgu $N = (1, +\infty), M = \mathbb{R}^2, F : N \to M$, ja

$$F(t) = (\frac{1}{t}\cos 2\pi t, \frac{1}{t}\sin 2\pi t).$$

Kujutuse astak on konstantne ja võrdub 1. Kujutus on injektiivne immersioon ja kujutis on tasandi alammuutkond (vt joonis 23).



Joonis 18: Esimene spiraal

Home Page
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Näide 3.3.6. Olgu $N = (1, +\infty), M = \mathbb{R}^2, F : N \to M$, ja

$$F(t) = (\frac{t+1}{2t} \cos 2\pi t, \frac{t+1}{2t} \sin 2\pi t).$$

Kujutuse astak on konstantne ja võrdub 1. Kujutus on injektiivne immersioon ja kujutis on tasandi alammuutkond (vt joonis 24).

Definitsioon 3.3.7. Kujutust $F : N \to M$, kus N, M on diferentseeruvad muutkonnad, nimetastakse sisestuseks, (*imbedding*) kui

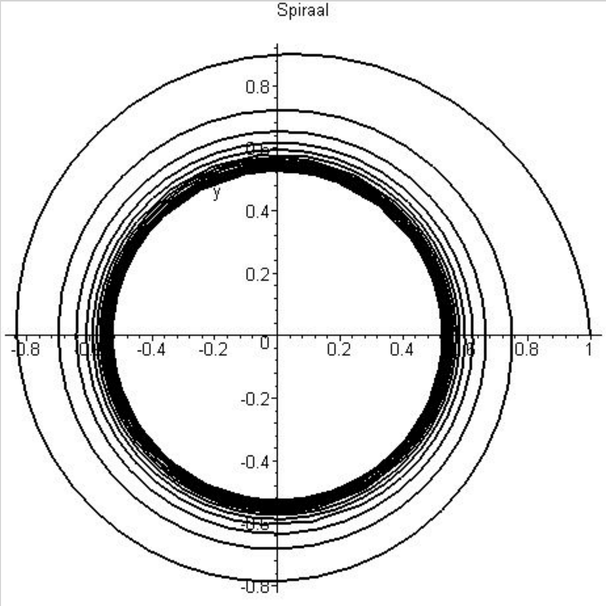
- F on injektiivne immersioon,
- $F : N \to F(N) = \tilde{N} \subset M$ on homöomorfism, kus $\tilde{N}$ topoloogia on muutkonna M topoloogilise alamruumi topoloogia. $\tilde{N} \subset M$ nimetatakse muutkonna M *sisestatud alammuutkonnaks* (*imbedded submanifold*).

Sisestuse definitsioonist järeldub, et sisestatud alammuutkonna topoloogiline struktuur on kooskõlaline muutkonna M topoloogilise struktuuriga (üldise topoloogia mõttes).

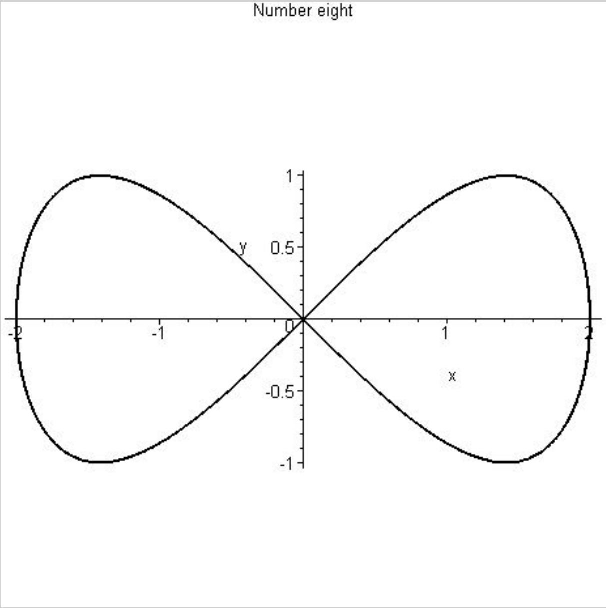
Näide 3.3.8. Olgu $N = \mathbb{R}, M = \mathbb{R}^2, F : N \to M$, ja

$$F(t) = (2 \cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin 2(t - \frac{\pi}{2})).$$

Kujutus on immersioon, kuid ta ei ole injektiivne immersioon. Tõepoolest, lihtne arvutus näitab, et suvalise täisarvu $k \in \mathbb{Z}$ korral $F(2k\pi) = (0, 0)$ (kujutuis on alguspunkt). Järelikult $F(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ ei ole tasandi alammuutkond (vt joonis 20).



Joonis 19: Teine spiraal



Joonis 20: Arv kaheksa

Näide 3.3.9. Veidi modifitseerime eelmist näidet nii, et kujutus oleks injektiivne immersioon. Oletame, et funktsioonil $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on järgmised omadused:

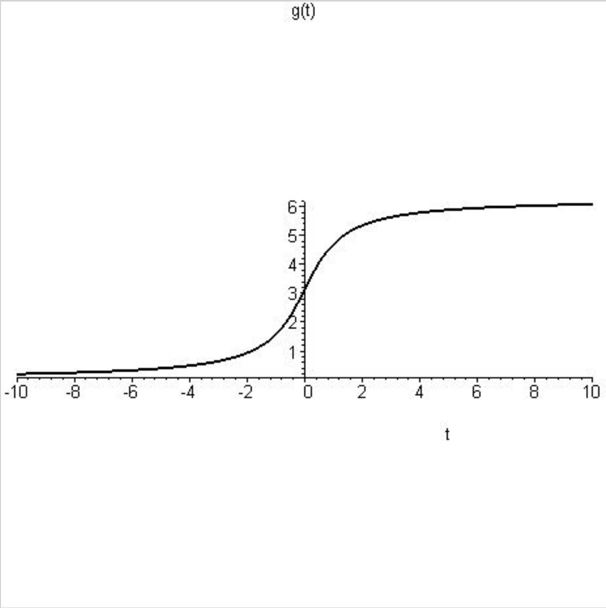
1. g on lõpmata diferentseeruv,
2. g on monotoonselt kasvav funktsioon, st $t_1 < t_2 \Rightarrow g(t_1) < g(t_2)$,
3. $\lim_{t\to-\infty} g(t) = 0,\ g(0) = \pi,\ \lim_{t\to\infty} g(t) = 2\pi$.

Selliste omadustega funktsioon on, näiteks, $g(t) = \pi + 2\,\arctan(t)$ (vt graafik 21) Nüüd eelmises näides kirjeldatud kujutust modifitseerime järgmiselt:

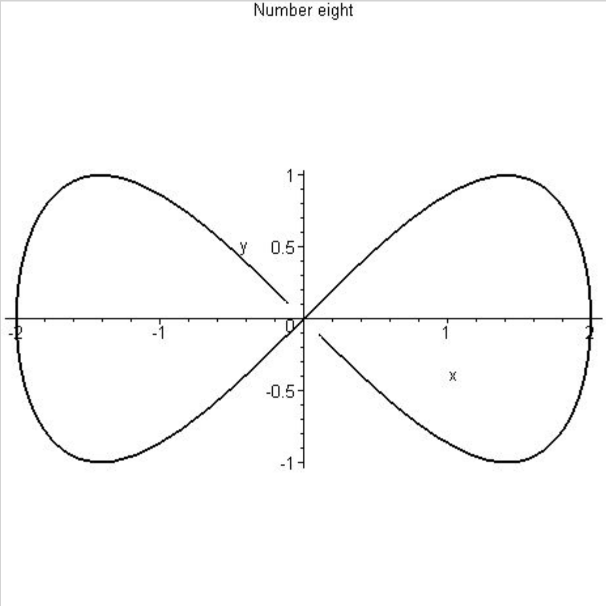
$$F(t) = (2\,\cos(g(t) - \frac{\pi}{2}), \sin\,2(g(t) - \frac{\pi}{2})).$$

Veenduge, et F on diferentseeruv kujutus, mille astak on 1 suvalise t korral. Järelikult F on immersioon. Kujutis $\operatorname{Im} F \subset \mathbb{R}^2$ on nädatud joonisel 22. Kujutis näitab, et F ei ole homöomorfism (kui meie vaatleme kujutist tasandi topoloogilise alamruumina). Seega, kui kujutus on injektiivne immersioon, sellest veel ei järeldu, et ta on sisestus. Mainime, et $\operatorname{Im} F$ on tasandi alammuutkond (immersed submanifold), kuid ta eil sisestatud alammuutkond (imbedded submanifold).

Viimases näidest järeldub, et kas kujutus on immersioon või sisestus sõltub kujutuse globaalsest struktuurist, mitte lokaalsest. Tõepoolest, viimase näide kujutus on injektiivne immersioon ja sisestus $t \neq 0$ piisavalt väikeses ümbruses, kuid globaalselt ta ei ole sisestus, kuigi ta on injektiivne immersioon.



Joonis 21: Funktsioon g(t)



Joonis 22: Veel üks *kaheksa*

Teoreem 3.3.10. *Olgu $F : N \to M$ immersioon, kus N, M on diferentseeruvad muutkonnad, ja $\dim N \leq \dim M$. Iga punkti $p \in N$ korral leidub tema ümbrus $U \subset N$ nii, et $F\Big|_U : U \to F(U) \subset M$ on sisestus.*

3.4. Regulaarne alammuutkond

Eelmises punktis oli defineeritud alammuutkonna mõiste. Diferentseeruva muutkonna M alammuutkond $N \subset M$ on diferentseeruva muutkonna $\tilde{N}$ kujutis $N = F(\tilde{N})$, kui kujutus $F : \tilde{N} \to M$ on injektiivne immersioon, kusjuures $F : \tilde{N} \to N \subset M$ on difeomrfism. See on kõige üldisem alammuutkonna mõiste ja teda hakkati laialt kasutama (ta osutus eriti effektiivseks Lie rühmade teoorias) Claude Chevalley teadustööde mõjul (vt [6]). Alammuutkonna N diferentseeruv struktuur on difeomorfne (ekvivalentne) muutkonna N diferentseeruva struktuuriga ja üldiselt kaudselt seotud muutkonna M, mille alamhulgaks ta on, diferentseeruva struktuuriga.

Definitsioon 3.4.1. Olgu $N \subset M$ diferentseeruva m-muutkonna M alamhulk. Öeldakse, et alamhulgal N on *n-alammuutkonna omadus*, kui $\forall p \in N$ korral leidub punkti p koordinaatümbrus $(U, \phi), U \subset M$ koordinaatidega $x^1, x^2, \dots, x^m$ selline, et

- $\phi(p) = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$,,
- $\phi(U) = C^m_\epsilon(0)$, kus $C^m_\epsilon(0)$ on m-mõõtmeline kuub keskpunktiga alguspunktis ja $\epsilon > 0$,
- $\phi(U \bigcap N) = \{x \in C^m_\epsilon(0) : x^{n+1} = \dots = x^m = 0\}$.

Kui N on alamhulk n-alammuutkonna omadusega, siis koordinaatümbrust ülalpool kirjeldatud omadustega nimetatakse punkti p *eelistatavaks koordinaatümbruseks* N suhtes.

Olgu $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, kus $m \geq n$, projektsiooni kujutus

$$\pi(x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m) = (x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Lemma 3.4.2. *Kui $N \subset M$ on diferentseeruva m-muutkonna M alamhulk n-alammuutkonna omadusega ($n < m$), siis N on diferentseeruv n-muutkond järgmise struktuuriga:*

1. *N on topoloogiline n-muutkond muutkonna M alamruumi topoloogia suhtes,*
2. *diferentseeruv struktuur on määratud atlasega $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, kus $V_\alpha = U_\alpha \bigcap N \subset N$, $\psi_\alpha = \pi \circ \phi_\alpha \big|_{V_\alpha} : V_\alpha \to \mathbb{R}^n$, kus $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ on muutkonna M kõikide eelistatavate koordinaatkaartide alamhulga N suhtes kogum,*
3. *sisaldamine $i : N \to M$ on sisestus muutkondade N ja M diferentseeruvate struktuuride suhtes.*

Definitsioon 3.4.3. Diferentseeruva m-muutkonna M *regulaarseks n-alammuutkonnaks* (*regular submanifold*) N nimetatakse muutkonna M alamhulka $N \subset M$ n-alammuutkonna omadusega ja diferentseeruva struktuuriga, mis on määratud muutkonna M eelistatavate koordinaatkaartide (N suhtes) kogumiga (vt Lemma 3.4.2 punkt 2).

Näide 3.4.4. Olgu $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ lõpmata diferentseeruv funktsioon. Funktsiooni f gradiendiks $\operatorname{grad} f$ nimetatakse vektorvälja

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

On ilmne, et $\operatorname{grad} f$ on sile vektorväli hulgal U. Olgu $c \in \mathbb{R}$. Hulka $S = f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^n$ nimetatakse *funktsiooni f tasemepinnaks* (*level surface*), kui

1. $S = f^{-1}(c) = \{x \in U : f(x) = c\} \neq \emptyset$,
2. iga $p \in S$ korral $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$.

Kasutades teoreemi pöördfunktsioonist (vt 2.5.5) või teoreemi kujutuse astakust (vt 3.3.2), saab näidata, et funktsiooni tasemepind on muutkonna $\mathbb{R}^n$ regulaarne alammuutkond dimensiooniga $n-1$. Seega, iga tasemepind on diferentseeruv muutkond ja meil on diferentseeruvate muutkondade üsna suur ja tähtis klass, kuhu kuuluvad nt kõik tesist järku pinnad, toor. Mainime, et diferentseeruvate muutkondade klass on laiem kui tasemepindade klass, sest projektiivne ruum ja Grassmanni muutkond ei ole tasemepinnad.

Osutub, et kehtib isegi üldisem teoreem:

Teoreem 3.4.5. *Olgu N, M diferentseeruvad muutkonnad dimensioonidega vastavalt n, m ja $F : N \to M$ diferentseeruv kujutus. Kui muutkonna N igas punktis kujutuse F astak on $k \leq \min(m,n)$ ja $q \in F(N) \subset M$ on kujutise $\operatorname{Im} F \subset M$ mingi punkt, siis $F^{-1}(q)$ on muutkonna N kinnine regulaarne alammuutkond dimensiooniga $n-k$.*

Järeldus. Olgu N, M diferentseeruvad muutkonnad dimensioonidega vastavalt n, m ja $m \leq n$. Kui $q \in M$ on selline punkt, et $Q = F^{-1}(q) \neq \emptyset$, ja hulga Q igas punktis diferentseeruva kujutuse $F : N \to M$ astak on m, siis $Q \subset N$ on muutkonna N kinnine regulaarne alammuutkond ja $\dim Q = n - m$.

3.5. Lie rühmad

Selle punkti põhiobjektiks on Lie rühm. Lie rühmade teooria on väga tähtis mitte ainult matemaatikas, kuid ka teoreetilises füüsikas ja mehaanikas.

Olgu G diferentseeruv muutkond. Oletame, et G on ka algebraline rühm korrutamistehtega $(x, y) \in G \times G \to x \cdot y \in G$ ja pöördelemendiga $x \in G \to x^{-1} \in G$. Meenutame, et muutkondade otsekorrutis $G \times G$ on ka diferentseeruv muutkond.

Definitsioon 3.5.1. Diferentseeruvat muutkonda G nimetatakse *Lie rühmaks* (*Lie group*), kui

1. G on algebraline rühm korrutamistehtega $(x, y) \in G \times G \to x \cdot y \in G$,
2. kujutused $(x, y) \in G \times G \to x \cdot y \in G$ ja $x \in G \to x^{-1} \in G$ on diferentseeruvad kujutused.

Kui G on topoloogiline muutkond ja algebraline rühm ning punktis 2 mainitud kujutused on pidevad, siis mmutkonda G nimetatakse topoloogiliseks rühmaks või pidevaks rühmaks.

Näide 3.5.2. Regulaarsete n-järku maatriksite rühm $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ (täielik lineaarrühm) on Lie rühm. Tõepoolest, punktis 3.1 näidatakse, et täielik lineaarrühm on diferentseeruv muutkond. Meenutame, et $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ on triviaalne muutkond, st atlas koosneb ühest koordinaatkaardist $(\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}),\phi)$, kusjuures maatriksi $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ koordinaadid selles koordinaatkaardis on

$$\phi(A) = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22} \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Näitame, et kujutused $(x,y) \in G \times G \to x \cdot y \in G$ ja $x \in G \to x^{-1} \in G$ on diferentseeruvad. Kui $A = (a_{ij}), B = (b_{kl}) \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ siis

$$A \cdot B = C = (c_{ik}) = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}),$$

kust järeldub, et korrutamisega määratud kujutus on diferentseeruv kujutus, kuna korrutise koordinaadid avalduvad maatriksite A, B koordinaatide kaudu polünomiaalselt. Kujutuse $A \to A^{-1}$ kuju koordinaatides on

$$A^{-1} = \left((-1)^{i+j} \frac{M_{ij}}{\det A}\right)^T, \ (M_{ij} \text{ on elemendi } a_{ij} \text{ täiendusmiinor}).$$

Seega, pöördmaatriksi koordinaadid on ratsionaalfunktsioonid, kusjuures nimetaja ei võrdu nulliga, kuna maatriks on regulaarne. Järelikult, kujutus $A \to A^{-1}$ on diferentseeruv kujutus ja

$\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ `on` n^2`-dimensionaalne Lie rühm`.

Näide 3.5.3. Olgu $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$, kus $\mathbb{C}$ on kompleksarvude korpus. $\mathbb{C}^*$ on 2-dimensioonalne Lie rühm kompleksarvude korrutamise suhtes. Tõepoolest, $\mathbb{C}^*$ on algebraline rühm, kuna $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ järeldub $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}^*$ ja $z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} \in \mathbb{C}^*$. Ühikelement on arv 1. $\mathbb{C}^*$ on diferentseeruv 2-muutkond ühe koordinaatkaardiga $(\mathbb{C}^*, \phi)$, kus $\phi(z) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, kui $z = x + i\, y \in \mathbb{C}^*$. Mainime, et koordinaatkaardiga $(\mathbb{C}^*, \phi)$ määratud diferentseeruv struktuur on reaalne diferentseeruv struktuur selles mõttes, et komplekstasandi alamhulgal $\mathbb{C}^*$ määratud funtsioon $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ määrab kujutust $\mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2$, kus $z = (x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$ ja $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$. Kujutus on diferentseeruv eespool määratud diferentseeruva struktuuri suhtes parajasti siis, kui $u(x, y), v(x, y)$ on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid (öeldakse, et $f(z)$ on $\mathbb{R}^2$-diferentseeruv). Teine võimalik struktuur on konformne struktuur, mis tugineb holomorfse funktsiooni mõistele (vt järgmine punkt *Riemanni pind*). Nüüd veendume, et kujutused $(z, z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \to z \cdot z' \in \mathbb{C}^*$ ja $z \in \mathbb{C}^* \to \frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$ on diferentseeruvad. Kirjutame koordinaatides

$$\begin{aligned} (z, z') &= ((x, y), (x', y')) \to z \cdot z' = (x\, x' - y\, y', x\, y' + y\, x'), \\ z &= (x, y) \to z^{-1} = (\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}). \end{aligned}$$

Nendest valemitest näeme, et komponentfunktsioonid on lõpmata diferentseeruvad.

Kui G_1, G_2 on algebralised rühmad, siis $G_1 \times G_2$ on algebraline rühm korrutamistehtega $(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') = (g_1 \cdot g_1', g_2 \cdot g_2')$. Ühikelement on paar (e, e'), kus $e \in G_1,\ e' \in G_2$.

Teoreem 3.5.4. *Kui G_1, G_2 on Lie rühmad, siis $G_1 \times G_2$ on Lie rühm muutkondade G_1, G_2 otsekorrutise diferentseeruva struktuuri suhtes.*

Teoreem 3.5.5. *Olgu G Lie rühm. Kui $H \subset G$ on G algebraline alamrühm ja $H \subset G$ on muutkonna G regulaarne alammuutkond, siis H on Lie rühm alammuutkonna diferentseeruva struktuuri suhtes.*

Kasutades teoreemi **??** võime tõestada, et järgmised rühmad on Lie rühmad.

Näide 3.5.6. Ühikringjoon $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ on algebraline rühm kompleksarvude korrutamise suhtes. Kuna $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ on Lie rühma $\mathbb{C}^*$ algebraline alamrühm ning $S^1 \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$ on regulaarne alammuutkond, siis teoreemi **??** tõttu S^1 on Lie rühm. Teoreemist 3.5.4 järeldub, et $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ on Lie rühm. Lie rühma T^n nimetatakse *toroidaalseks rühmaks* (*toral group*). Toroidaalne rühm on Abeli rühm.

Olgu G Lie rühm. Kui $g \in G$, siis kujutust $L_g : G \to G$ defineeritakse valemiga $L_g(x) = g \cdot x$ ja nimetatakse *elemendiga g määratud vasaknihkeks* (*left translation by g*). Analoogiliselt kujutust $R_g : G \to G$, kus $R_g(x) = x \cdot g$, nimetatakse paremnihkeks. On ilmne, et vasaknihe L_g (paremnihe R_g) on diferentseeruv kujutus (teisendus). Suvalise $g \in G$ korral vasaknihe $L_g : G \to G$ on bijektsioon, kuna $L_{g^{-1}} : G \to G$ on teisenduse L_g pöördteisendus, st $L_{g^{-1}} = L_g^{-1}$. Kuna pöördteisendus on ka diferentseeruv, L_g on difeomorfism. Olgu $\mathrm{Diff}\,(G)$ Lie rühma G difeomorfismide hulk. On ilmne, et $\mathrm{Diff}\,(G)$ on (algebraline) rühm, kui korrutamistehteks on difeomorfismide kompositsioon. On lihtne näidata, et kujutus $g \in G \to L_g \in \mathrm{Diff}\,(G)$ on (algebraliste) rühmade homomorfism, st $L_{g\cdot g'} = L_g \circ L_{g'}$.

Näide 3.5.7. Unimodulaarsete maatriksite rühm $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ on algebraline rühm ja regulaarne alammuutkond, seega $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ on Lie rühm. Algebralise rühma struktuur baaserub valemitel

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\det(B), \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}).$$

Näitame, et $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ on muutkonna $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ regulaarne alammuutkond. Selleks kasutame teoreemi 3.4.5 ja kujutust $F : \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $F(A) = \det A$, kus $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Teiste sõnadega, teoreemi 3.4.5 tähestustes $N = \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}^*$ ja $F(A) = \det A$. Hulk $\mathbb{R}^*$ on Abeli rühm reaalarvude korrutamise suhtes ja selle struktuuri suhtes F on algebraliste rühmade homomorfism. Kujutus F on lõpmata diferentseeruv kujutus, kuna maatriksi determinant on polünoom maatriksi elementidest. Näitame, et kujutuse F astak on konstantne. Olgu $A \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ mingi regulaarne maatriks ja $\det A = a \neq 0$. Igale regulaarsele maatriksile $X \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ vastab rühma $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ vasaknihe $L_X : \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$, kus $L_X(Y) = X\cdot Y$, $Y \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$. Kehtib

$$F(X) = L_a \circ F \circ L_{A^{-1}}\,X.$$

Kujutuste ahelreeglist (vt 2.2.4)järeldub, et

$$DF(X) = DL_a \circ DF \circ DL_{A^{-1}}\,(X).$$

Seega,

$$\mathrm{rank}\,DF(X) = \mathrm{rank}\,(DL_a \circ DF \circ DL_{A^{-1}}\,(X)).$$

Kuid $L_{A^{-1}}$ on difeomorfism, järelikult $DL_{A^{-1}}$ on regulaarne maatriks ja maatriksarvutust järeldub

$$\operatorname{rank} DF(X) = \operatorname{rank}\,(DL_a \circ DF\,(A^{-1}\,X)).$$

Rühma $\mathbb{R}^*$ vasaknihe L_a on arvuga a korrutamine, st $L_a(x) = ax$, ja sellise kujutuse Jacobi maatriks on arv $a \neq 0$, seega

$$\operatorname{rank} DF(X) = \operatorname{rank}\big(a\, DF(A^{-1}\,X))\big) = \operatorname{rank}(DF(A^{-1}\,X)).$$

Kuna eelmine valem kehtib suvalise $A \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ korral, võtame $A = X$, siis

$$\operatorname{rank} DF(X) = \operatorname{rank}\big(DF(E))\big) = \text{const}. \tag{3.5.1}$$

Seega, $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ on Lie rühm. On lihtne näidata, kasutades valemit (3.5.1), et F-i astak on 1. Tõepoolest, olgu $X = (x_{ij})$. Arendades esimese veeru järgi, saame

$$F(X) = x_{11}X_{11} + x_{21}X_{21} + \ldots + x_{n1}X_{n1},$$

kus X_{ij} on elemendi x_{ij} algebraline täiend. Kujutuse F Jacobi maatriks rühma $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ koordinaatides on

$$DF(X) = \Big(\frac{\partial F}{\partial x_{11}}, \frac{\partial F}{\partial x_{12}}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_{nn}}\Big).$$

On ilmne, et $\frac{\partial F}{\partial x_{11}} = X_{11}$ ($X_{21}, \ldots, X_{n1}$ ei sisalda x_{11}). Seega $\frac{\partial F}{\partial x_{11}}\Big|_E = 1$, ja $\operatorname{rank} DF = 1$.

Näide 3.5.8. Väljateooriates on väga tähtsad unitaarsed rühmad $\mathrm{SU}(N)$. Väljateooriat nimetatakse kalibratsiooniväljateooriaks, kui ta baseerub Lie rühmal. Kõige tuntum kalibratsiooniväljateooria on Yang-Millsi väljateooria, mis baaserub Lie rühmal $\mathrm{SU}(2)$, st Yang-Millsi kalibratsioonirühm on $\mathrm{SU}(2)$. Yang-Millsi väljateooria on Maxwelli teooria üldistus. Rühm $\mathrm{SU}(3)$ on *kromodünaamika kalibratsioonirühmaks*. Meenutame

$$\mathrm{SU}(N) = \{U \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) : \det U = 1,\, U \cdot U^\dagger = E\},$$

kus $U^\dagger = \bar{U}^T$. Maatriksit nimetatakse unitaarseks maatriksiks, kui ta rahuldab $U \cdot U^\dagger = E$. On lihtne näidata, et $\mathrm{SU}(N)$ on algebraline rühm. Näitame, et $\mathrm{SU}(2)$ on Lie rühm. Kehtib

$$U \cdot U^\dagger = E \quad \Leftrightarrow \quad U^{-1} = U^\dagger.$$

Olgu

$$U = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}.$$

Unitaarsuse tingimus annab

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{21} \\ \bar{z}_{12} & \bar{z}_{22} \end{pmatrix} = U^\dagger,$$

või

$$\bar{z}_{11} = z_{22}, \quad z_{12} = -\bar{z}_{21}.$$

Seega

$$U \in \mathrm{SU}(2) \quad \Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ -\bar{z}_{12} & \bar{z}_{11} \end{pmatrix}, |z_{11}|^2 + |z_{12}|^2 = 1.$$

Olgu $\mathcal{M}(2,\mathbb{C})$ maatriksite

$$U = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ -\bar{z}_{12} & \bar{z}_{11} \end{pmatrix}$$

hulk. Olgu $z_{11} = x_1 + ix_2, z_{12} = x_3 + ix_4$. Defineerime $\phi : \mathcal{M}(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^4$ järgmiselt

$$\phi(U) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

On ilmne, et ϕ on bijektsioon. Seega, $\mathcal{M}(2,\mathbb{C})$ on neljamõõtmeline diferentseeruv muutkond. Rühm SU(2) on eraldatud tingimusega

$$|z_{11}|^2 + |z_{12}|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Kolmemõõtmeline sfäär S^3 on muutkonna $\mathbb{R}^4$ regulaarne alammuutkond. Korrutamisega määratud kujutuse $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ komponendid muutkonna $\mathcal{M}(2,\mathbb{C})$ koordinaatides on järgmised: kui $\phi(U) = (x_1, x_2, x_3, x_4), \phi(V) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, siis $\phi(U \cdot V) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \varphi_3(x,y), \varphi_4(x,y))$, kus

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,y) &= x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4, \\
\varphi_2(x,y) &= x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3, \\
\varphi_3(x,y) &= x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2, \\
\varphi_4(x,y) &= x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1.
\end{aligned}$$

Kuna funktsioonid $\varphi_i(x,y)$ on polünoomid koordinaatide suhtes, nad on lõpmata diferentseeruvad ja kujutus $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ on diferentseeruv kujutus. Kui diferentseeruvat kujutust ahendame regulaarsele alammuutkonnale

$\varphi\Big|_{S^3\times S^3} : S^3 \times S^3 \to S^3$, siis ahend $\varphi\Big|_{S^3\times S^3}$ on diferentseeruv kujutus. Analoogiliselt näitame, et kujutus $U \to U^{-1}$ on diferentseeruv. Seega, $\mathrm{SU}(2)$ on 3-dimensionaalne Lie rühm. Mainime, et meie arutlusest järeldub:

$$\boxed{\texttt{Lie rühm SU(2) on difeomorfne 3-sfääriga } S^3}$$

Näide 3.5.9. Analoogiliselt saab näidata, et ortogonaalmaatriksite rühmad $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ on Lie rühmad (harjutusülesanne). Meenutame, et

$$\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}) : A \cdot A^T = E\}, \tag{3.5.2}$$
$$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}) : A \cdot A^T = E, \det A = 1\}. \tag{3.5.3}$$

Definitsioon 3.5.10. Olgu G_1, G_2 Lie rühmad. Kujutust $F : G_1 \to G_2$ nimetatakse Lie rühmade homomorfismiks, kui

- F on algebraline homomorfism,
- F on diferentseeruv kujutus.

Näide 3.5.11. Muutkond $G_1 = \mathbb{R}$ on Lie rühm reaalarvude liitmise suhtes (reaalarvude aditiivne rühm), $G_2 = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ on Lie rühm kompleksarvude korrutamise suhtes. Kujutus $F : G_1 \to G_2$, kus $F(t) = e^{i2\pi t}$ on Lie rühmade homomorfism. Analoogiliselt, $G_1 = \mathbb{R}^n$ on Lie rühm liitmise suhtes,

$T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ on toroidaalne Lie rühm, siis kujutus $F : G_1 \to G_2$, kus $F(t_1, t_2, \ldots, t_n) = (e^{i2\pi t_1}, e^{i2\pi t_2}, \ldots, e^{i2\pi t_n})$ on Lie rühmade homomorfism.

Teoreem 3.5.12. *Kui $F : G_1 \to G_2$ on Lie rühmade homorfism, siis kujutuse F astak on konstantne. Homomorfismi F tuum $\ker F$ on muutkonna G_1 regulaarne alammuutkond ja, seega, $\ker F \subset G_1$ on Lie rühm, kusjuures $\dim \ker F = \dim G_1 - \operatorname{rank} F$.*

Tõestus. Olgu $a \in G_1$ ja $b = F(a) \in G_2$ elemendi a kujutis F suhtes. Olgu e, e' vastavalt rühmade G_1, G_2 ühikelemendid. Kehtib

$$F(x) = F(a\, a^{-1}\, x) = F(a)\, F(a^{-1}\, x) = L_b \circ F \circ L_{a^{-1}}(x).$$

Sellest järeldub

$$DF(x) = DL_b(F(a^{-1}x)) \cdot DF(a^{-1}x) \cdot DL_{a^{-1}}(x).$$

Kuna vasaknihe on difeomorfism (suvalise elemendi korral ja suvalises punktis), siis $DL_b(F(a^{-1}x))$ ja $DL_{a^{-1}}(x)$ on regulaarsesd maatriksid. Seega, $\operatorname{rank} DF(x) = \operatorname{rank} DF(a^{-1}x)$, ja kui võtame $a = x$, siis $\operatorname{rank} DF(x) = \operatorname{rank} DF(e) = \text{const}$. Homomorfismi omadustest teame, et $e' \in \operatorname{Im} F$. Seega, teoreemi 3.4.5 tõttu $\ker F = F^{-1}(e') \subset G_1$ on muutkonna G_1 kinnine regulaarne alammuutkond. Kuna $\ker F$ on G_1 algebraline alamrühm, $\ker F$ on Lie rühm (teoreem 3.5.5). ▲

Definitsioon 3.5.13. Olgu G Lie rühm. Alamhulka $H \subset G$ nimetatakse Lie rühma *alamrühmaks*, kui

- H on G algebraline alamrühm, st $x, y \in H \;\Rightarrow\; x \cdot y^{-1} \in H$,

- H on G alammuutkond (immersed submanifold) ja H on Lie rühm alammuutkonna diferentseeruva struktuuri suhtes.

Teoreem 3.5.14. *Kui $H \subset G$ on Lie rühma G alamrühm ja H on regulaarne alammuutkond, siis H on G kinnine alamhulk.*

Kehtib ka pöördteoreem: kui $H \subset G$ on Lie rühma G alamrühm ja H on G kinnine alamhulk, siis H on regulaarne alammuutkond. Tegelikult saab tõestada teoreemi (vt [9]): Kui $H \subset G$ on algebraline alamrühm ja kinnine alamhulk, siis H on Lie rühma G alamrühm ja, kuna H on kinnine alamhulk, H on regulaarne alammuutkond.

Definitsioon 3.5.15. Olgu G Lie rühm ja M diferentseeruv muutkond. Öeldakse, et *Lie rühm G toimib vasakult muutkonnal M* (*Lie group acts on M on the left*), kui on määratud kujutus $\theta : G \times M \to M$, mis rahuldab tingimusi:

- θ on C^∞-kujutus (diferentseeruv),
- $\theta(e, x) = x$, kus $e \in G$ on ühikelement ja $x \in M$,
- $\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 \cdot g_2, x)$, kus $g_1, g_2 \in G$, $x \in M$.

Kui $\theta : G \times M \to M$ on Lie rühma G vasaktoime muutkonnal M ja $g \in G$ on fikseeritud, siis θ indutseerib kujutust $\theta_g : M \to M$, kus $\theta_g(x) = \theta(g, x)$. Definitsiooni 3.5.15 teisest tingimusest järeldub, et $\theta_e = \mathrm{id}_M$. On lihtne veenduda, et iga $g \in G$ korral kujutus $\theta_g : M \to M$ on bijektsioon. Tõepoolest, $\theta_{g^{-1}}$

on kujutuse θ_g pöördkujutus (järeldub definitsiooni 3.5.15 viimasest tingimusest). Kuna nii θ_g, kui ka $\theta_{g^{-1}}$ on diferentseeruvad, siis iga $g \in G$ korral kujutus θ_g on muutkonna M difeomorfism. Olgu $\operatorname{Diff} M$ muutkonna M difeomorfismide rühm. Definitsiooni 3.5.15 viimane tingimus on ekvivalentne sellega, et kujutus $g \in G \to \theta_g \in \operatorname{Diff} M$ on homomorfism, st $\theta_{g_1 \cdot g_2} = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}$. Järgnevas meie sageli Lie rühma toimet kirjutame kujul $x \to g \cdot x$ jättes vahele θ.

`Vasaktoime` $G \times M \to M$ `indutseerib homomorfismi` $G \to$ `Diff` M. `Vasaktoimet nimetatakse efektiivseks, kui selle homomorfismi tuum koosneb ainult ühikelemendist` $e \in G$

Definitsioon 3.5.16. Olgu G Lie rühm, V lõplikumõõtmeline vektorruum ja $\mathrm{Gl}(V)$ vektorruumi V lineaarteisenduste Lie rühm ($L \in \mathrm{Gl}\,(V) \Leftrightarrow \ker L = \{0\}$). Lie rühmade homomorfismi $\rho : G \to \operatorname{Lin} V$ nimetatakse Lie rühma *lineaaresituseks* (*linear representation of a Lie group*). Esitust nimetatakse taandumatuks esituseks (*irreducible representation*), kui ei leidu sellist vektorruumi V alamruumi K (K on mittetriviaalne alamruum, st $K \neq \{0\}, V$), et $\forall g \in G, \forall x \in K$ korral $\rho(g)\, x \in K$, st $\rho(g)\, K \subset K$.

Rühma G esitus $\rho : G \to \mathrm{Gl}\,(V)$ tekitab rühma vasaktoimet $\theta : G \times V \to V$, kus $\theta(g, x) = \rho(g)\, x$.

Definitsioon 3.5.17. Olgu $\theta : G \times M \to M$ Lie rühma vasaktoime muutkonnal

M. Muutkonna M punkti p *orbiidiks* (*orbit*) $Gp \subset M$ nimetatakse hulka

$$Gp = \{q \in M : q = \theta(g,p),\ g \in G\}.$$

Kui $Gp = \{p\}$ (orbiit koosneb ainult punktist p), siis punkti p nimetatakse muutkonna *püsipunktiks* (*fixed point*) Lie rühma G vasaktoime suhtes. Kui $Gp = M$, siis vasaktoimet nimetatakse *transitiivseks*

Näide 3.5.18. Olgu Lie rühm $G = \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ ja diferentseeruv muutkond $M = \mathbb{R}^n$. Lie rühma $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ vasaktoimet muutkonnal $\mathbb{R}^n$ defineerime valemiga

$$\theta(A,x) = A \cdot x,$$

kus A on regulaarne maatriks ja x on üheveeruline maatriks, mille elemendid on punkti x koordinaadid, st

$$\theta^i(A,x) = A^i_j\, x^j.$$

On ilmne, et antud toime on transitiivne toime alammuutkonnal $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ja efektiivne.

Näide 3.5.19. Olgu Lie rühm $G = \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ (ortogonaalmaatriksite rühm) ja $M = \mathbb{R}^n$. Vasaktoimet määrame, nagu eelmises näides, valemiga

$$\theta^i(A,x) = A^i_j\, x^j, \quad A = (A^i_j) \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R}).$$

On lihtne näha, et sellise toime orbiidid on ruumi $\mathbb{R}^n$ $(n-1)$-mõõtmelised sfäärid keskpunktiga alguspunktis, seega, antud toime ei ole transitiivne, kuid ta on efektiivne.

Definitsioon 3.5.20. Olgu Lie rühm G toimib vasakult muutkonnal M, st $\theta : G \times M \to M$. Kui $p \in M$ on muutkonna punkt, siis rühma G alamrühma $G_p = \{g \in G : \theta(g,p) = p\}$ nimetatakse isotroopiarühmaks (*isotropy group or stability group*) punktis p. Kui iga $p \in M$ korral isotroopiarühm on triviaalne $G_p = \{e\}$, siis |oeldakse, et G toimib *vabalt* muutkonnal M (*a group acts freely on a manifold*). .

3.6. Riemanni pind

Meenutame, et $f(z)$ on $\mathbb{C}$-diferentseeruv punktis $z = x + iy \in \mathbb{C}$ parajasti siis, kui $f(z)$ on $\mathbb{R}^2$-diferentseeruv $(u(x,y), v(x,y)$ on määratud punkti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ümbruses ja on diferentseeruvad selles punktis, nt funktsioonide osatuletised on määratud punkti ümbruses ja nad on pidevad funktsioonid selles punktis) ja on täidetud Cauchy-Riemanni tingimus

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Kui funktsioon $f(z)$ on $\mathbb{C}$-diferentseeruv $\mathbb{C}^*$ igas punktis, siis ta on holomoorfne ehk analüütiline funktsioon.

Olgu S topoloogiline 2-muutkond.

Definitsioon 3.6.1. Topoloogilise 2-muutkonna S atlast $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, kus $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$, nimetatakse *konformseks atlaseks*, kui üleminekufunktsioonid

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \subset \mathbb{C} \to \phi_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta) \subset \mathbb{C},$$

on holomorfsed funktsioonid. Kui muutkonnal S on antud konformne atlas, siis muutkonda S nimetatakse *Riemanni pinnaks* (*Riemanni surfaces*).

4. Vektorväljad ja diferentsiaalvormid

4.1. Diferentseeruva muutkonna puutujaruum

Olgu M diferentseeruv m-muutkond, $U \subset M$ lahtine alamhulk, $p \in U$ ja $f : U \to \mathbb{R}$ C^∞-diferentseeruv funktsioon (vt def. 3.2.1). Olgu

$$\tilde{C}^\infty(p) = \{f \in C^\infty(U) : p \in U, U \subset M, \}.$$

Kui $f, g \in \tilde{C}^\infty(p)$ ja $f : U \to \mathbb{R}, g : V \to \mathbb{R}$, siis ütleme $f \sim g$, kui leidub selline $W \subset U \cap V$, et $f\Big|_W \equiv g\Big|_W$. Tähistame $C^\infty(p) = \tilde{C}^\infty(p)/_\sim$ ja funktsiooni $f \in \tilde{C}^\infty(p)$ ekvivalentsiklassi tähistame $[f] \in C^\infty(p)$ ning nimetame funktsiooni kasvuks punktis p. On võimalik näidata, et $C^\infty(p)$ on algebra üle $\mathbb{R}$ järgmiste tehete suhtes:

$$\lambda\,[f] := [\lambda\, f],\;\; [f] + [g] := [f + g],\;\; [f] \cdot [g] := [f \cdot g].$$

Definitsioon 4.1.1. Diferentseeruva muutkonna M *puutujavektoriks* (*tangent vector*) punktis p nimetame lineaarkujutust $X_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, kui ta rahuldab Leibnizi valemit

$$X_p([f] \cdot [g]) = X_p([f])\, g(p) + f(p)\, X_p([g]).$$

Puutujavektorite punktis p hulk T_pM on vektorruum, kui

$$(X_p + Y_p)([f]) := X_p([f]) + Y_p([f]), \quad (\lambda\, X_p)([f]) := \lambda\,(X_p([f])).$$

Vektorruumi T_pM nimetatakse muutkonna M puutujaruumiks punktis p.

Olgu $F : M \to N$ diferentseeruv kujutus, $p \in M, q = F(p) \in N$. Kujutust $F^* : C^\infty(q) \to C^\infty(p)$ defineerime valemiga $F^*([f]) = [f \circ F]$, kus $[f] \in C^\infty(q)$.

Lause 4.1.2. *Kujutus $F^* : C^\infty(q) \to C^\infty(p)$ on algebrate homomorfism.*

Definitsioon 4.1.3. Lineaarkujutust $F_* : T_pM \to T_qN$, kus

$$F_*(X_p)([f]) := X_p(F^*([f])), \quad X_p \in T_pM, [f] \in C^\infty(q),$$

nimetatakse *kujutuse F diferentsiaaliks.*

Lause 4.1.4. *Olgu L, M, N diferentseeruvad muutkonnad ja*

$$F : U \subset L \to M, \quad G : V \subset M \to N, \quad F(U) \subset V$$

diferentseeruvad kujutused.

a) Suvalises punktis $p \in U$ kehtib

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_pL \to T_qN, \quad q = G \circ F(p). \tag{4.1.1}$$

b) Kui $F : U \subset L \to F(U) \subset M$ on difeomorfism, siis iga $p \in U$ korral $F_* : T_pL \to T_{F(p)}M$ on isomorfism.

c) Kui $U \subset M$ ja $F = id\big|_U : U \to U$ on samasusteisendus, siis suvalise $p \in U$ korral F_* on puutujaruumi T_pM samasusteisendus, st $F_* = id\big|_{T_pM}$.

Tõestus.

a) Kui $X_p \in T_pL$, $[f] \in C^\infty(q)$, siis kehtib

$$\begin{aligned}(G\circ F)_*(X_p)([f]) &= X_p([f\circ(G\circ F)]),\\ G_*\circ F_*(X_p)([f]) &= G_*(F_*(X_p))([f]) = F_*(X_p([f\circ G]))\\ &= X_p([(f\circ G)\circ F]).\end{aligned}$$

Kujutuste korrutamise assotsiatiivsusest järeldub, et suvaliste $X_p \in T_pL$, $[f] \in C^\infty(q)$ korral kehtib $(G\circ F)_*(X_p)([f]) = G_*\circ F_*(X_p)([f])$. Seega $(G\circ F)_* = G_*\circ F_*$.

b) Olgu $q = F(p) \in M$. Näitame, et kui $F_*(X_p) = 0_q$, kus 0_q on vektorruumi T_q nullvektor, siis $X_p = 0_p$, kus $0_p \in T_pL$ on nullvektor. Piisab, kui meie näitame, et suvalise $[g] \in C^\infty(p)$ kehtib $X_p([g]) = 0$. On ilmne, et $[g\circ F^{-1}] \in C^\infty(q)$. Kehtib

$$0 = 0_q([g\circ F^{-1}]) = F_*(X_p)([g\circ F^{-1}]) = X_p([(g\circ F^{-1})\circ F]) = X_p([g].)$$

Järelikult, F_* on injektiivne. Näitame, et F_* on peale kujutus. Olgu $Y_q \in T_qM$. Kui $[f] \in C^\infty(p)$, siis määrame puutujavektorit $X_p \in T_pL$ valemiga $X_p([f]) = Y_q([f\circ F^{-1}])$. Kehtib

$$F_*(X_p)([g]) = X_p([g\circ F]) = Y_q([g\circ(F\circ F^{-1})] = Y_q([g]) \Rightarrow F_*(X_p) = Y_q.$$

c) Iseseisvalt.

Muutkonna M puutujaruumi ja diferentseeruva kujutuse $F : M \to N$ kirjeldamiseks lokaalsetes koordinaatides fikseerime: Olgu $p \in U \subset M$ ja (U,ϕ)

muutkonna M lokaalne kaart koordinaatidega $(x^i) = (x^1, x^2, \dots, x^m)$, $q = F(p) \in V \subset N$ ning (V, ψ) muutkonna N lokaalne kaart koordinaatidega $(y^\alpha) = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ ning $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : y^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^m)$. Lokaalne kirjeldus on järgmine:

- Kujutus $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ on difeomorfism, seega kujutuse ϕ diferentsiaal $\phi_* : T_pM \to T_{\phi(p)}\mathbb{R}^m$ on vektorruumide isomorfism (vt Lause 4.1.4). Järelikult, $\dim T_pM = m$.

- Puutujaruumi $T_{\phi(p)}\mathbb{R}^m$ baas on $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\phi(p)}\}$. Seega,

$$E_p = \{E_{i,p}\} = \{\phi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\phi(p)})\}$$

  on puutujaruumi T_pM baas lokaalsetes koordinaatides $x^1, x^2, \dots, x^m$.

- $E_{i,p}(f) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{\phi(p)}$, kus f on punkti p ümbruses määratud sile funktsioon,

- $X_p = \sum_{i=1}^m (X_p\, x^i)\, E_{i,p}$, kus x^i on koordinaatkaardi (U, ϕ) i-s koordinaatfunktsioon,

- $F_*(E_p) = DF(p) \cdot E'_q \Leftrightarrow F_*(E_{i,p}) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\Big|_{\phi(p)} E'_{\alpha,q}$, kus $E'_q = \{E'_{\alpha,q}\}$ on puutujaruumi T_qN baas.

- kui $(U,\phi),(U',\phi')$ on muutkonna lokaalsed kaardid koordinaatidega vastavalt $x^1,x^2,\dots,x^m$ ja $x'^1,x'^2,\dots,x'^m$, $p\in U\cap U'$ ning üleminekufunktsioonid on

$$\phi'\circ\phi^{-1}: x'^i = x'^i(x^1,x^2,\dots,x^m),$$

$$\phi\circ\phi'^{-1}: x^i = x^i(x'^1,x'^2,\dots,x'^m).$$

Puutujaruumis T_pM on kaks baasi $E_p=\{E_{i,p}\}, E'_p=\{E'_{i,p}\}$. Kehtib

$$E_{i,p}=\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\Big|_{\phi(p)}E'_{j,p},\quad E'_{i,p}=\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\Big|_{\phi'(p)}E_{j,p}.$$

Kui $X_p=a^i\,E_{i,p}, X_p=a'^j\,E'_{j,p}$, siis

$$a'^i=\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\Big|_{\phi(p)}a^j,\quad a^i=\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\Big|_{\phi'(p)}a'^j.$$

On ilmne, et maatriks $(\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\Big|_{\phi(p)})$ on maatriksi $(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\Big|_{\phi'(p)})$ pöördmaatriks. st

$$\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\Big|_{\phi(p)}\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\Big|_{\phi'(p)}=\delta^j_k.$$

4.2. Vektorväljad muutkonnal

Olgu M diferentseeruv m-muutkond ja $TM=\bigcup_{p\in M}T_pM$ ühisosata hulkade $\{T_pM\}$ ühend. Defineerime projektsiooni $\pi: TM\to M$ valemiga $\pi(X_p)=p$, kus $X_p \in T_pM$. On võimalik teha TM diferentseeruvaks $2m$-muutkonnaks, kusjuures projektsioon π on diferentseeruv kujutus muutkondade M ja TM diferentseeruvate struktuuride suhtes. Muutkonda TM nimetatakse *muutkonna M puutujavektorkonnaks* (*tangent vector bundle of a manifold* M). Mainime, et puutujavektorkond on vektorkonna (*vector bundle*) erijuht ja vektorkondade teooria on tähtis nii kaasaegses diferentsiaalgeomeetrias, kui ka teoreetilises füüsikas ja mehaanikas.

Definitsioon 4.2.1. Kujutust $X : M \to TM$ nimetame *siledaks vektorväljaks muutkonnal* (*smooth vector field on a manifold*) M, kui

- $\pi \circ X = \mathrm{id}\Big|_M$, st $X(p) = X_p \in T_pM$,
- suvalise koordinaatkaardi (U, ϕ) korral $X\Big|_U$ sõltub siledalt lokaalsetest koordinaatidest $x = (x^1, x^2, \ldots, x^m)$, st $X\Big|_U = f^i(x)\, E_i$, kus $f^i : U \to \mathbb{R}$ on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid, st $f^i \in C^\infty(U)$ ja $E_i : U \to \pi^{-1}(U) \subset TM$ on määratud valemiga $E_i(p) = E_{i,p}$. $E_U = \{E_i\}$ nimetatakse puutujavektorkonna TM lokaalseks reeperiväljaks (*local field of frames*) kaardi (U, ϕ) koordinaatides ja funktsioone f^i nimetatakse vektorvälja X komponentideks lokaalse reeperivälja E_U suhtes.

Märkus 4.2.2. Kuna antud aine raames vaatleme ainult siledaid vektorvälju, järgnevas kasutame terminit *vektorväli* pidades silmas sildat vektorvälja. Vektorväljade vektorruumi tähistame $\mathcal{D}M$.

Märkus 4.2.3. Kui puutujavektorkonnal TM on konstrueeritud diferentseeruva muutkonna struktuur, siis ülalpool antud definitsioonis võime teise punkti asendada sõnadega $X : M \to TM$ *on diferentseeruv kujutus.*

Märkus 4.2.4. Kujutust $X : M \to TM$, mis rahuldab $\pi \circ X = \mathrm{id}$ vektorkondade teoorias nimetatakse *lõikeks*. Seega, vektorkondade terminoloogias sile vektorväli on puutujavektorkonna diferentseeruv lõige.

Märkus 4.2.5. Vektorväljade süsteemi $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$, $X_i \in \mathcal{D}M$ nimetatakse k-reeperiväljaks muutkonnal M ($k = m$ juhul lihtsalt reepeeriväljaks), kui muutkonna igas punktis p puutujavektorid $X_1(p), X_2(p), \ldots, X_k(p)$ on lineaarselt sõltumatud. Kui muutkonnal M eksisteeriks reeperiväli, siis iga vektorvälja komponendid oleksid määratud globaalselt ja oleks võimalik vektorvälja X samastada kujutusega $X : M \to \mathbb{R}^m$. Kui globaalne reeperiväli muutkonnal M eksisteerib, siis öeldakse, et puutujavektorkond TM on triviaalne (sel juhul $TM = M \times \mathbb{R}^m$). Üldiselt globaalne reepeeriväli ei eksisteeri, st puutujavektorkond ei ole triviaalne, ja takistuseks on muutkonna topoloogia (algebralise topoloogia mõttes). Nt sfääril S^2 ei eksisteeri lineaarselt sõltumatut vektorvälja (isegi pidevat), st igas punktis vektorvälja väärtus on nullvektorist erinev sfääri puutujavektor. See on algebralise topoloogia tuntud teoreem (Brouweri teoreem või žargoonis teda nimetatakse *teoreemiks pealaest*) ja meie ta tõestame selle peatüki lõpuosas kasutades vektorvälja singulaarse punkti, indeksi ja Euleri karakteristiku mõisteid.

Lause 4.2.6. *Kui $F : M \to N$ on muutkondade difeomorfism ja X on vektorväli muutkonnal X, st $X \in \mathcal{D}M$, siis kujutus $q \in N \to Y_q \in T_qN$, kus $Y_q = F_*(X_{F^{-1}(q)})$, määrab vektorvälja muutkonnal N.*

Lausest järeldub, et definitsiooni 4.2.1 teise punkti lokaalne reeperiväli E_U koosneb vektorväljadest $E_i = \phi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$ ja vektorväli E_i on määratud lahtisel hulgal $U \subset M$.

Olgu $1 \geq m < n$ täisarv ja oletame, et M on ruumi $\mathbb{R}^n$ regulaarne m-muutkond (mainime, et M võib olla alammuutkond või sisestatud alammuutkond). Muutkonda M hakkame nimetama ruumi $\mathbb{R}^n$ *m-pinnaks*. Juhul, kui $m = n-1$ muutkonda M nimetame ruumi $\mathbb{R}^n$ *hüperpinnaks*. Olgu $x^1, x^2, \ldots, x^n$ ruumi $\mathbb{R}^n$ koordinaadid ja $u^1, u^2, \ldots, u^m$ ruumi $\mathbb{R}^m$ koordinaadid. Olgu (U, ϕ) m-pinna M lokaalne kaart, st $\phi : U \to V = \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$. Kujutuse ϕ pöördkujutust tähistame ψ, st $\psi : V \to U \subset M$. On ilmne, et ψ on difeomorfism. Mainime, et pindade teoorias $(m = 2, n = 3)$ kujutust $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ nimetatakse *parameetriliseks pinnaks*, kusjuures sel juhul tavaliselt nõutakse, et ψ oleks diferentseeruv kujutus ja immersioon (pinna teoorias öeldakse regulaarne pind, mis tähendab, et kujutuse ψ Jacobi maatriksi astak hulga V igas punktis on m). Kuna $\psi : V \subset \mathbb{R}^m \to U \subset M \subset \mathbb{R}^n$ on kujutus ruumist $\mathbb{R}^m$ ruumi $\mathbb{R}^n$, siis võime kirjutada

$$\psi : \quad x^i = \psi^i(u^1, u^2, \ldots, u^m),$$

kus $\psi^i : V \to \mathbb{R}$ on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid. Meenutame, et $\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ on sile vektorväli hulgal V ja vektorväljade süsteem $\{\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\}_{\alpha=1}^m$ on reeperiväli hulgal V. Lokaalne reeperiväli muutkonnal M tekib järgmiselt:

$$E_U = \{E_\alpha\}, \quad E_\alpha = \psi_*(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}).$$

Home Page

Page 144 of 182

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Kasutades valemit (vt puutujaruumi lokaalne kirjeldus)

$$F_*(E_{i,p}) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\Big|_{\phi(p)} E'_{\alpha,q},$$

leiame

$$E_\alpha = \frac{\partial \psi^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{4.2.1}$$

Kuna m-pind asub ruumis $\mathbb{R}^n$, selle pinna igas punktis $p \in U \subset M$ on kaks baasi $\{E_{\alpha,p}\}, \{E_{i,p}\}$, kus esimene on m-pinna puutujaruumi baas ja teine on ruumi $\mathbb{R}^n$ puutujaruumi baas ja valem 4.2.1 näitab, millised on m-pinna puutujaruumi baasivektorite $E_{\alpha,p}$ koordinaadid puutujaruumi $T_p\mathbb{R}^n$ baasil $E_{i,p} = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$. On ilmne, et m-pinna puutujavektorite $E_{\alpha,p}$ lineaarkate on T_pM ja valemist 4.2.1 järeldub, et $T_pM \subset T_p\mathbb{R}^n$ on vektorruumi $T_p\mathbb{R}^n$ alamruum.

Olgu $\phi(p) = q \in V$ ja $\gamma_\alpha : I_\delta \to V$ parameetriline joon, kus

$$\gamma_\alpha(t) = (q^1, q^2, \dots, q^{i-1}, q^\alpha + t, q^{i+1}, \dots, q^m), \quad -\delta < t < \delta.$$

On ilmne, et γ_α on ruumi $\mathbb{R}^m$ α-s koordinaatjoon, mis läbib punkti q. Selle joone kiirusvektor on baasivektor $E_{\alpha,p}$. Joon γ_α indutseerib pasrameetrilise joone $\tilde{\gamma}_\alpha = \psi \circ \gamma : I_\delta \to U$ m-pinnal M. Kehtib $\tilde{\gamma}(0) = p$. Parameetriliste joonte süsteemi $\{\tilde{\gamma}_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ nimetatakse m-pinna M kõverjoonelisteks koordinaatideks punkti p ümbruses. Kehtib

$$\frac{d\tilde{\gamma}_\alpha}{dt}\Big|_{t=0} = (p; \frac{\partial \psi^1}{\partial u^\alpha}\big|_q, \dots, \frac{\partial \psi^n}{\partial u^\alpha}\big|_q) = \sum_i \frac{\partial \psi^i}{\partial u^\alpha}\big|_q \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p = E_{\alpha,p}.$$

Meenutame, et iga $T_p\mathbb{R}^n$ on eukleidiline ruum skalaarkorrutamisega $<\ ,\ >_p$ (vt 2.3.2). Kuna iga $p \in M$ korral T_pM on vektorruumi $T_p\mathbb{R}^n$ alamruum, siis skalaarkorrutamine $<\ ,\ >_p$ indutseerib skalaarkorrutamise m-pinna M puutujaruumil T_pM. Tähistame $g =<\ ,\ >_p \big|_{T_pM}$. On ilmne, et $g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ on positiivselt määratud sümmeetriline bilineaarvorm, mis on määratud m-pinna M igas punktis. Kui X, Y on vektorväljad m-pinnal M, siis on määratud funktsioon $g(X, Y)(p) = g(X_p, Y_p)$. Kujutuse ψ lokaalsetes koordinaatides $u^1, u^2, \ldots, u^m$ kehtib

$$g(X, Y) = g(f^\alpha E_\alpha, h^\beta E_\beta) = f^\alpha\, h^\beta\, g(E_\alpha, E_\beta).$$

Tähistame $g_{\alpha\beta} = g(E_\alpha, E_\beta)$ ja arvutame

$$g_{\alpha\beta} = g(E_\alpha, E_\beta) =< \frac{\partial\psi^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial\psi^j}{\partial u^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^j} >$$

$$= \frac{\partial\psi^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\psi^j}{\partial u^\beta} < \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} >= \frac{\partial\psi^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\psi^j}{\partial u^\beta}\,\delta_{ij}$$

$$= \frac{\partial\psi^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\psi^i}{\partial u^\beta}.$$

Järelikult, lokaalselt

$$g(X, Y) = f^\alpha\, h^\beta\, \frac{\partial\psi^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial\psi^i}{\partial u^\beta},$$

ja tuletatud valem näitab, et suvaliste vektorväljade X, Y korral ja suvalise lokaalse kaardi (U, ϕ) korral funktsioon $g(X, Y)\big|_U$ on lõpmata diferentseeruv.

Definitsioon 4.2.7. Olgu M diferentseeruv m-muutkond. Kui muutkonna M igas punktis on määratud selline positiivselt määratud sümmeetriline bilineaarvorm $g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, et suvaliste vektorväljade $X, Y \in \mathcal{D}M$ ja suvalise koordinaatkaardi (U, ϕ) korral funktsioon $g(X,Y)\big|_U$ on lõpmata diferentseeruv, siis (M, g) nimetatakse *Riemanni muutkonnaks* (*Riemannian manifold*) ja g nimetatakse muutkonna M Riemanni meetrikaks. Kui (U, ϕ) on muutkonna M lokaalne kaart lokaalse reeperiväljaga $E_U = \{E_\alpha\}$, siis funktsioone $g_{\alpha\beta} = g(E_\alpha, E_\beta)$ nimetatakse muutkonna M meetrilisteks kordajateks kaardi (U, ϕ) koordinaatides.

Lause 4.2.8. *Kui M on ruumi $\mathbb{R}^n$ regulaarne m-muutkond (m-pind), siis (M, g) on Riemanni muutkond, kus Riemanni meetrika g on indutseeritud ruumi $\mathbb{R}^n$ eukleidilise struktuuriga.*

Näide 4.2.9. Olgu $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ kahedimensonaalne ühiksfäär. Teame, et S^2 on ruumi $\mathbb{R}^3$ regulaarne 2-muutkond, seega Riemanni muutkond. Olgu $\psi : V \to S^2$ sfääri lokaalne parametriseerimine, kus

$$V = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi\},$$

ja

$$\psi(\varphi, \theta) = (\cos\,\varphi \sin\,\theta, \sin\,\varphi \sin\,\theta, \cos\,\theta).$$

Leiame sfääri meetrilised kordajad lokaalsetes koordinaatides u, v. Kehtib

$$E_\varphi = \psi_*(\frac{\partial}{\partial\varphi}) = -\sin\varphi\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y},$$

$$E_\theta = \psi_*(\frac{\partial}{\partial\theta}) = \cos\varphi\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial y} - \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Seega

$$g_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta, \quad g_{\varphi\theta} = 0, \quad g_{\theta\theta} = 1.$$

Olgu $\alpha : I \to M, I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ parameetriline joon muutkonnal M, st α on diferentseeruv kujutus. Parameetrilise joone *kiirusvektoriks* (*velocity vector*) $\dot\alpha(t_0)$ punktis $t_0 \in I$ nimetame muutkonna M puutujavektorit punktis $p = \alpha(t_0)$

$$\dot\alpha(t_0) = \alpha_*(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}).$$

Olgu (U,ϕ) punkti p koordinaatümbrus $\phi(p) = (x^1(p), x^2(p), \ldots, x^m(p))$. Kehtib

$$\begin{aligned}
\dot\alpha(t_0)([f]) &= \alpha_*(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0})([f]) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}([f\circ\alpha]) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}([(f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\alpha]) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}(\hat f(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^m(t)) \\
&= \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=t_0}\frac{\partial\hat f}{\partial x^i}\Big|_{\phi(p)} = \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=t_0} E_{i,p}([f]) = \dot x^i(t_0)\,E_{i,p}([f]).
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\dot\alpha(t_0) = \dot x^i(t_0)\,E_{i,p},$$

kus $\phi\circ\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^m(t))$. Seega, kui $\alpha : I \to M$ on parameetriline joon muutkonnal M, siis $\dot\alpha$ on vektorväli piki joont α, st iga $t \in I$ korral $\dot\alpha(t) \in T_{\alpha(t)}M$ ja lokaalsetes koordinaatides

$$\phi\circ\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^m(t)) \quad\Rightarrow\quad \dot\alpha(t) = \dot x^i(t)\,E_i(\alpha(t)).$$

Definitsioon 4.2.10. Olgu X vektorväli muutkonnal M. Parameetrilist joont $\alpha : I \to M$, kus $I = (a, b)$, $0 \in I$, nimetame vektorvälja X integraaljooneks, kui

$$\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t)).$$

Olgu $W \subset \mathbb{R} \times M$ selline muutkonna $\mathbb{R} \times M$ lahtine alamhulk, et $\forall p \in M$ korral leiduvad reaalarvud $a(p) < 0 < b(p)$ nii, et

$$W \bigcap (\mathbb{R} \times \{p\}) = \{(t, p) : a(p) < t < b(p)\}.$$

Tähistame $I(p) = (a(p), b(p))$ ja $I_\delta = \{t \in \mathbb{R} : -\delta < t < \delta\}$. On ilmne, et $W = \cup_{p \in M} I(p) \times \{p\}$.

Definitsioon 4.2.11. *Üheparameetrilise rühma lokaalseks toimeks muutkonnal* (*a local action of one-parameter group on a manifold*) M nimetatakse kujutust $\theta : W \to M$, kui ta rahuldab tingimusi:

a) suvalise $p \in M$ korral $\theta(0, p) = p$,

b) kui $(s, p) \in W$, siis $a(\theta(s, p)) = a(p) - s$, $b(\theta(s, p)) = b(p) - s$. Järelikult, kui $a(\theta(s, p)) < t < b(\theta(s, p))$, siis $\theta(s + t, p) \in W$ ja peab olema täidetud $\theta(t + s, p) = \theta(t, \theta(s, p))$.

Üheparameetrilise rühma lokaalset toimet muutkonnal M ka nimetatakse *vooks* (*flow*).

Kui $\theta : W = \mathbb{R}\times M \to M$, siis öeldakse, et on määratud üheparameetrilise rühma $\mathbb{R}$ globaalne toime muutkonnal M. Kui kujutuses $\theta(t,p)$ punkt p on fikseeritud ja t muutub vahemikus $a(p) < t < (p)$, siis muutkonnal M tekib üheparameetriline joon $\alpha_p : I(p) \to M$, $\alpha_p(t) = \theta(t,p)$, mis läbib punkti p, st $\alpha_p(0) = p$. On ilmne, et $\operatorname{Im}\alpha_p = \{\alpha_p(t) \in M : t \in I(p)\} \subset M$ on lokaalse toime orbiit. Kui kujutuses $\theta(t,p)$ parameetri t väärtus on fikseeritud, siis tekib kujutus, mida tähistame θ_t. Globaalse toime korral $\theta_t : M \to M$ iga $t \in \mathbb{R}$ jaoks, kuid lokaalse toime korral kujutus θ_t on määratud muutkonna M lahtisel alamhulgal, mitte kogu muutkonnal M. Olgu V_t kujutuse θ_t määramispiirkond, st $V_t = \{p \in M : (t,p) \in W\}$. Kui s on selline arv, et $\theta(s,p) \in V_t$, siis kehtib $\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p)$.

Lause 4.2.12. *Kujutus $\theta_t : V_t \to V_{-t}$ on difeomorfism.*

Tõestus. Oletame, et $p \in V_t$, st $(t,p) \in W \Leftrightarrow a(p) < t < b(p)$. Näitame, et $\theta_t(p) \in V_{-t}$. Tõepoolest, kehtib

$$\begin{aligned} a(p) < 0 < b(p) \quad &\Rightarrow \quad a(p) - t < -t < b(p) - t \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad a(\theta_t(p)) < -t < b(\theta_p(t)) \Rightarrow \theta_t(p) \in V_{-t}. \end{aligned}$$

Seega, $\theta_t : V_t \to V_{-t}$. Analoogiliselt näitame, et $\theta_{-t} : V_{-t} \to V_t$. Definitsiooni 4.2.11 kohaselt $\theta(-t, \theta(t,p)) = \theta(0,p) = p$, seega $\theta_{-t} \circ \theta_t = \mathrm{id}_{V_t}$. Analoogiliselt näitame, et $\theta_t \circ \theta_{-t} = \mathrm{id}_{V_{-t}}$. Järelikult $\theta_t^{-1} = \theta_{-t}$. Arvestades, et θ diferentseeruvuse tõttu kujutused θ_t ja θ_{-t} on diferentseeruvad, jõuame järelduseni, et $\theta_t : V_t \to V_{-t}$ on difeomorfism.

Definitsioon 4.2.13. Kui $\theta : W \to M$ on üheparameetrilise rühma lokaalne toime muutkonnal M, siis selle toime *infinitesimaalseks generaatoriks* (*infinitesi-*

mal generator) nimetatakse vektorvälja X, mis on punktis p määratud valemiga

$$X_p([f]) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\theta_t(p)) - f(p)}{t} = \dot{\alpha}_p(0)([f]),$$

kus $[f] \in C^\infty(p), t \in I_\delta \subset I(p)$.

Teoreem 4.2.14. *Olgu $\theta : W \to M$ üheparameetrilise rühma lokaalne toime muutkonnal M ja vektorväli X lokaalse toime θ infinitesimaalne generaator.*

a) Kui $p \in V_t$, siis $\theta_{t*}(X_p) = X_{\theta_t(p)}$.

b) Suvalise punkti $p \in M$ korral lokaalse toime orbiit $\alpha_p : I(p) \to M$ on vektorvälja X integraaljoon, st $\dot{\alpha}_p(t) = X(\alpha_p(t))$.

c) Kui $X_p \neq 0_p$, siis $\alpha_p : I(p) \to M$ on immersioon. Kui $X_p = 0_p$, siis orbiit koosneb ühest punktist, st iga $t \in I(p)$ korral $\alpha_p(t) = p$.

Kasutades teoreemi 2.4.10 on võimalik näidata, et kehtib pöördteoreem

Teoreem 4.2.15. *Olgu X vektorväli muutkonnal M ja $p \in M$.*

a) Leidub vahemik $I(p) = (a(p), b(p)) \subset \mathbb{R}$, mis sisaldab 0, ja vektorvälja X ainus intergaaljoon $\alpha_p : I(p) \to M$, mis läbib punkti p, st $\alpha(0) = p$. (Integraaljoone ainsus tähendab, et kui $\beta_p : I'(p) \to M$ on vektorv"lja X mingi teine integraaljoon, mis läbib punkti p, siis $I'(p) \subset I(p)$ ja $\alpha_p\big|_{I'(p)} \equiv \beta_p$.

Home Page

Page 151 of 182

Go Back

Full Screen

Close

Quit

b) *Kui* $W = \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M : t \in I(p)\}$ *ja* $\theta(t,p) = \alpha_p(t)$*, siis* $\theta : W \to M$ *on üheparameetrilise rühma lokaalne toime muutkonnal* M*, st* $\theta(0,p) = p$, $a(\theta(s,p)) = a(p) - s, b(\theta(s,p)) = b(p) - s$ *ning suvalise* $t \in I(\theta(s,p))$ *korral* $\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p)$*.*

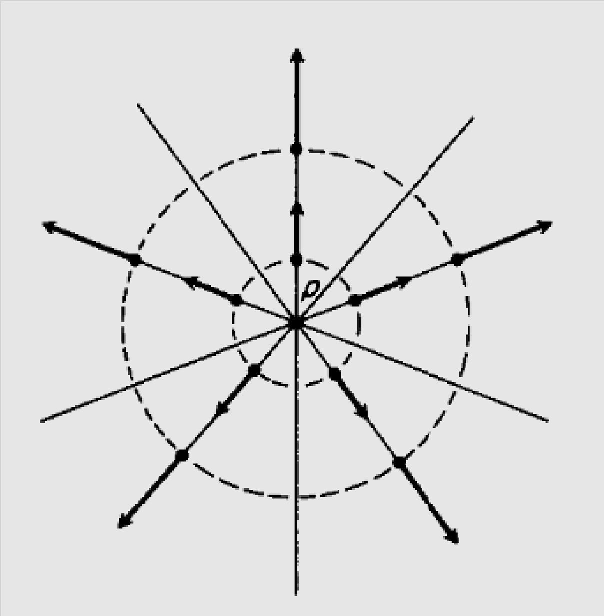
c) *Üheparameetrilise rühma lokaalse toime infinitesimaalne generaator on vektorväli* X*.*

`Üheparameetrilise rühma lokaalne toime muutkionnal` M

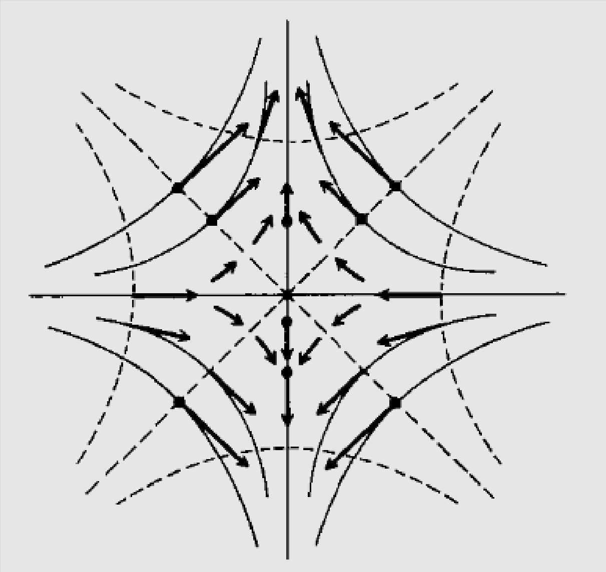
$\Updownarrow$

`Vektorväli muutkonnal` M`. Integraaljooned on toime orbiidid.`

Kui X on vektorväli muutkonnal M, siis punkti $p \in M$ nimetatakse vektorvälja *singulaarseks punktiks* (*singular point of a vector field*) if $X(p) = X_p = 0_p$, ja *regulaarseks punktiks*, kui $X(p) \neq 0_p$. Integraaljoonte geomeetrilised kujud vektorvälja isoleeritud singulaarse punkti ümbruses on mitmesugused isegi dimensioonis kaks (tasandil). Joonistel 23, 24 on näidatud gradientvektorväljad tasandil singulaarsete punktide ümbruses. Vapustav seos pinna topoloogia ja pinnal määratud vektorvälja singulaarsete punktide liikide vahel oli avastatud ja kirjeldatud H. Poincaré ja Hopf'i töödes. Selle seose kirjeldamiseks kasutame vektorvälja indeksi mõistet. Antud konspektis meie ei anna indeksi üldist definitsiooni (selleks meil puudub tarvilik formalism, kuid huvitatud lugeja võib leida vastava materjali raamatus [3]).



Joonis 23: Vektorvälja indeks on $i_p = 1$



Joonis 24: Sadulpunkt (saddle point). Indeks on $i_p = -1$

4.3. Vektorväljade Lie algebra ja Lie tutelis

Olgu $p \in M$, X vektorväli muutkonnal M ja $\theta : W \to M$ vektorvälja X poolt tekitatud üheparameetrilise rühma lokaaltoime.

Definitsioon 4.3.1. Olgu $X, Y \in \mathcal{D}(M)$. Vektorvälja Y *Lie tuletiseks punktis* $p \in M$ *vektorvälja* X *suhtes* (*Lie derivative*) nimetatakse vektorvälja $L_X Y$, mida määratakse valemiga

$$(L_X Y)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (Y_p - \theta_{t*} Y_{\theta(-t,p)})$$

Olgu (ϕ, U) muutkonna M lokaalne kaart koordinaatidega $x^1, x^2, \ldots, x^m$. Olgu

$$X\Big|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y\Big|_U = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

vektorväljade kuju koordinaatkaardi (ϕ, U) lokaalsetes koordinaatides. Olgu $\theta = \{\theta^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^m)\}$ üheparameetrilise rühma lokaalne toime lokaalsetes koordinaatides, st

$$\theta_t : x = (x^1, x^2, \ldots, x^m) \in U \to (\theta^1(t, x^1, x^2, \ldots, x^m), \ldots, \theta^m(t, x^1, x^2, \ldots, x^m)).$$

Kui $x \to \theta_t(x)$, siis selle kujutuse diferentsiaal $\theta_{t*} : T_x M \to T_{\theta_t(x)} M$ avaldub järmiselt:

$$Z_{\theta_t(x)} = \theta_{t*}(Z_x), \quad Z^i_{\theta_t(x)} = \frac{\partial \theta^i(t,x)}{\partial x^j} \, Z^j_x,$$

kus $Z_x \in T_x M, Z_{\theta_t x} \in T_{\theta_t(x)} M$. Seega

$$\theta_{t*} Y_{\theta(-t,p)} = \frac{\partial \theta^i(t,x)}{\partial x^j}\Big|_{\phi(p)} \, Y^j(\theta(-t,p)).$$

Arendame funktsiooni $\theta^i(t,x)$ ritta t järgi punktis $t=0$. Kehtib

$$\theta^i(t,x) = x^i + \frac{d\theta^i(t,x)}{dt}\Big|_{t=0} t + \frac{1}{2!}\frac{d^2\theta^i(t,x)}{dt^2}\Big|_{t=0} t^2 + \dots .$$

Seega

$$\begin{aligned}\theta_{t*}Y_{\theta(-t,p)} &= Y^i(\theta(-t,p)) + \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\frac{d\theta^i(t,x)}{dt}\Big|_{t=0}\Big)\, t\, Y^j(\theta(-t,p)) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\frac{d^2\theta^i(t,x)}{dt^2}\Big|_{t=0}\Big)\, t^2\, Y^j(\theta(-t,p)) + \dots\end{aligned}$$

Arvestame, et $\theta(t,x)$ on vektorvälja X integraaljoon, mis läbib punkti x, seega

$$\frac{d\theta^i(t,x)}{dt}\Big|_{t=0} = X^i(x).$$

Järelikult

$$(L_XY)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y_p - \theta_{t*}Y_{\theta(-t,p)}) = \lim_{t\to 0}\frac{Y_p - Y^i(\theta(-t,p))}{t} - \frac{\partial X^i(x)}{\partial x^j}\Big|_{\phi(p)} Y^j(p).$$

Kuid

$$\lim_{t\to 0}\frac{Y_p - Y^i(\theta(-t,p))}{t} = -\lim_{t\to 0}\frac{Y^i(\theta(-t,p)) - Y_p}{t} = -\frac{d}{dt}\Big(Y^i(\theta(-t,p))\Big)\Big|_{t=0}.$$

Kasutades liitfunktsiooni diferentseerimist saame

$$\lim_{t\to 0}\frac{Y_p - Y^i(\theta(-t,p))}{t} = -\frac{\partial Y^i(x)}{\partial x^j}\Big|_{\phi(p)}\frac{d\theta^j(-t,p)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial Y^i(x)}{\partial x^j}\Big|_{\phi(p)} X^j(p).$$

Seega

$$(L_X Y)_p = X^j(p)\,\frac{\partial Y^i(x)}{\partial x^j}\Big|_{\phi(p)} - Y^j(p)\,\frac{\partial X^i(x)}{\partial x^j}\Big|_{\phi(p)} = [X,Y]^i(p).$$

Teoreem 4.3.2. *Kui X, Y on vektorväljad muutkonnal M, siis vektorvälja Y Lie tuletis vektorvälja X suhtes on vektorväli $L_X Y$, mis avaldub vektorväljade X, Y kaudu Lie kommutatoori abil, st*

$$L_X Y = [X, Y].$$

4.4. Diferentsiaalvormid ja välisdiferentseerimine

Olgu V m-mõõtmeline vektorruum üle $\mathbb{R}$.

Definitsioon 4.4.1. *Kovektoriks* (*covector*) või *1-järku välisvormiks* nimetatakse lineaarkujutust $\omega : V \to \mathbb{R}$, st 1-järku välisvorm ω rahuldab lineaarsuse tingimust

$$\omega(a\,v_1 + b\,v_2) = a\,\omega(v_1) + b\,\omega(v_2), \quad a, b \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in V.$$

1-järku välisvormid moodustavad m-mõõtmelise vektorruumi, kui 1-järku välisvormide liitmist ja korrutamist reaalarvudega defineerida valemitega

$$(\omega + \theta)(v) = \omega(v) + \theta(v), \quad (a\,\omega)(v) = a\,\omega(v).$$

1-järku välisvormide vektorruumi nimetatakse vektorruumi V *kaasruumiks* (*dual space*) ja tähistatakse V^*.

Näide 4.4.2. Olgu V m-mõõtmeline eukleidiline vektorruum skalaarkorrutamisega $(v, w) \in V \times V \to < v, w > \in \mathbb{R}$. Fikseerime vektorruumi V ühe vektori $v \in V$ ja defineerime kujutust $\omega : V \to \mathbb{R}$ valemiga $\omega_v(w) = < v, w >$, kus w on vektorruumi V suvaline vektor. Kuna skalaarkorrutis $< v, w >$ on lineaarfunktsioon nii vektori v, kui ka vektori w suhtes, kujutus ω_v on 1-järku välisvorm. Seega $\omega_v \in V^*$.

Olgu $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ vektorruumi V baas, st suvalise vektori $v \in V$ korral kehtib $v = v^i e_i$. Kui ω on 1-järku välisvorm, siis ta on täielikult määratud, kui meie teame, millised on tema väärtused baasivektoritel. Tõepoolest olgu antud $\omega(e_i) = \omega_i$. Nüüd suvalise vektorruumi V vektori v korral arvutame 1-järku välisvormi ω väärtuse järgmise valemi järgi

$$\omega(v) = \omega(\sum_{i=1}^{m} v^i e_i) = \sum_{i=1}^{m} v^i w(e_i) = \sum_{i=1}^{m} v^i w_i. \qquad (4.4.1)$$

Vektorruumi V baas $\{e_i\}$ indutseerib kaasruumi V^* baasi $\{\sigma^j\}$, kus iga σ^j on 1-järku välisvorm, järgmiselt

$$\sigma^i(e_j) = \delta^i_j. \qquad (4.4.2)$$

Baasi $\{\sigma^j\}$ nimetatakse baasi $\{e_i\}$ *duaalseks baasiks* (*dual basis*). Seega, kui $\omega \in V^*$ on suvaline 1-järku välisvorm, siis ta on esitatav baasivormide lineaarkombinatsiooni kujul $\omega = \omega_i \sigma^i$, kus $\omega_i = \omega(e_i)$ on reaalarvud. Kui vektorruumis V toimub üleminek ühelt baasilt $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ teisele $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$, kus baasiteisenduse maatriks on $A = (a^j_i)$, st $e'_i = a^j_i e_j$, siis kaasruumis toimub üleminek baasilt $\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^m$ baasile $\sigma'^1, \sigma'^2, \ldots, \sigma'^m$ järgmiselt $\sigma'^i = b^i_j \sigma^j$, kus $B = (b^i_j)$ on maatriksi A pöördmaatriks, st $a^j_i b^i_k = \delta^j_k$.

Näide 4.4.3. Olgu V m-mõõtmeline eukleidiline vektorruum skalaarkorrutamisega $(v,w) \in V \times V \to < v,w > \in \mathbb{R}$. Iga vektor $v \in V$ tekitab 1-järku välisvormi ω_v (vt näide 4.4.2). Olgu $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ vektorruumi V baas, $g_{ij} = < e_i, e_j >$ ja $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\}$ duaalne

Olgu V, W vektorruumid üle $\mathbb{R}$, $V \times W = \{(v,w) : v \in V, w \in W\}$ ja $\mathcal{L}(V \times W)$ vektorruumide V, W otsekorrutise lineaarkate, st

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V \times W) \;\; = \;\; & \{a_1(v_1,w_1) + a_2(v_2,w_2) + \ldots + a_N(v_N, lw_N) : \\ & a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{R}, v_1, v_2, \ldots, v_N \in V, w_1, w_2, \ldots, w_N \in W\}, \end{aligned}$$

ehk $\mathcal{L}(V \times W)$ on paaride $(v,w) \in V \times W$ kõikvõimalikud lõplikud lineaarkombinatsioonid reaalkordajatega. On ilmne, et $\mathcal{L}(V \times W)$ on vektorruum. Konstrueerime vektorruumi $\mathcal{L}(V \times W)$ alamruumi $\mathcal{T}$ järgmiselt: alamruum $\mathcal{T}$ koosneb vektorruumi $\mathcal{L}(V \times W)$ vektorite

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w),$$

$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2),$$

$$a\,(v,w) - (a\,v, w), \;\; a\,(v,w) - (v, a\,w),$$

kus $v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W, a \in \mathbb{R}$ on suvalised vektorid ja arvud, kõikvõimalikutest lõplikutest lineaarkombinatsioonidest. Vektorruumi $\mathcal{L}(V \times W)/\mathcal{T}$ (vektorruumi faktorruum alamruumi järgi) nimetatakse vektorruumide V, W *tensorkorrutiseks* (*tensor product of vector spaces*) ja tähistatakse $V \otimes W$. Kui $v \in V, w \in W$, siis paari $(v,w) \in \mathcal{L}(V \times W)$ ekvivalentsiklassi tähistatakse $v \otimes w$ ja nimetatakse vektorite tensorkorrutiseks. Kui V, W on lõplikumõõtmelised vektorruumid, nt $\dim V = m, \dim W = n$ ja $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ on vastavate vektorrumide baasid, siis $\dim V \otimes W = mn$ ja $\{e_i \otimes f_\alpha\}, i = 1, 2, \dots, m, \alpha = 1, 2, \dots, n$ on tensorkorrutise $V \otimes W$ baas.

Olgu V lõplikumõõtmeline vektorruum ja V^* selle kaasruum. Moodustame tensorkorrutise

$$V^{r,s} = V \otimes V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$$

(r korda V ja s korda V^*). Selle tensorkorrutise elemente nimetatakse (r,s)-tensoriteks ehk r-kontravariantseks ja s-kovariantseks tensoriks. Olgu $T \in V^{r,s}$ ja $\{e_i\}.\{\sigma^j\}$ vektorruumide V, V^* baasid (teineteise duaalsed baasid). Siis $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \sigma^{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma^{j_s}\}$ on vektorruumi $V^{r,s}$ baas ja

$$T = T^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \sigma^{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma^{j_s},$$

kus kordajaid $T^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s}$ nimetatakse tensori T komponentideks. Kui $e'_i = a^j_i e_j, \sigma'^i = b^i_j \sigma^j$, siis

$$T^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} = \tilde{T}^{k_1 k_2 \dots k_r}_{l_1 l_2 \dots l_s} a^{i_1}_{k_1} a^{i_2}_{k_2} \dots a^{i_r}_{k_r} b^{l_1}_{j_1} b^{l_2}_{j_2} \dots b^{l_s}_{j_s}. \tag{4.4.3}$$

Sageli (eriti diferentsiaalgeomeetrias, füüsikas ja mehaanikas) tensoriks nimetatakse kogumit $\{T^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s}\}$, mis on määratud igal baasil, ja üleminekul ühelt baasilt teisele teiseneb valemi (4.4.3) järgi.

Olgu M diferentseeruv m-muutkond, $U \subset M$ muutkonna M lahtine alamhulk, T_pM muutkonna M puutujaruum punktis $p \in U$ ja T^*_pM puutujaruumi kaasruum.

Definitsioon 4.4.4. Kujutust $\omega : p \in U \to \omega_p \in T^*_p M$, mis seab hulga U igale punktile p vastavusse üheselt määratud kovektori ω_p, nimetatakse *esimest järku diferentsiaalvormiks* või *1-diferentsiaalvormiks* (*differential 1-form*) hulgal $U \subset M$.

Olgu $V \subset U$ lahtine alamhulk, $X \in \mathcal{D}(V)$ sile vektorväli hulgal V ja ω 1-diferentsiaalvorm hulgal U. Funktsiooni $\omega(X) : V \to \mathbb{R}$ hulgal V määrame valemiga

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p), \quad p \in M.$$

Definitsioon 4.4.5. Esimest järku diferentsiaalvormi ω hulgal U nimetatakse siledaks esimest järku diferentsiaalvormiks, kui suvalise lahtise alamhulga $V \subset U$ ja suvalise sileda vektorvälja $X \in \mathcal{D}(V)$ korral funktsioon $\omega(X) : V \to \mathbb{R}$ on lõpmata diferentseeruv funktsioon, st $\omega(X) \in C^\infty(V)$.

Kuna järgnevas meie vaatleme ainult siledaid 1-diferentsiaalvorme termin 1-diferentsiaalvorm tähendab sile 1-diferentsiaalvorm. Siledate 1-diferentsiaalvormide määramispiirkonnaga $U \subset M$ hulka tähistame $\Omega^1(U)$. See on vektorruum üle $\mathbb{R}$, kui liitmist ja arvudega korrutamist määrame valemitega

$$(\omega + \omega')_p = \omega_p + \omega'_p, \quad (\lambda\,\omega)_p = \lambda\,\omega_p.$$

Mainime, et $\Omega^1(U)$ on lõpmata dimensionaalne vektorruum. Olgu $f \in C^\infty(U)$ sile funktsioon ja $\omega \in \Omega^1(U)$ 1-diferentsiaalvorm. Korrutist $f\,\omega$ määrame valemiga

$$(f\,\omega)_p = f(p)\,\omega_p, \quad p \in U. \tag{4.4.4}$$

On ilmne, et $f\,\omega$ on 1-diferentsiaalvorm, kusjuures suvalise vektorvälja X korral kehtib $(f\,\omega)(X) = f\,\omega(X)$ (valemi parempoolel seisab funktsioonide f ja $\omega(X)$ korrutis). On lihtne näidata, kui $f \in C^\infty(U)$ on sile funktsioon ja $\omega \in \Omega^1(U)$ on sile 1-diferentsiaalvorm, siis korrutis $f\,\omega \in \Omega^1(U)$ on sile 1-diferentsiaalvorm. Samas on lihtne veenduda, et $\Omega^1(U)$ on moodul üle funktsioonide algebra $C^\infty(U)$ korrutamise (4.4.4) suhtes.

Olgu $f \in C^\infty(U)$ sile funktsioon. Funktsioon f indutseerib 1-diferentsiaalvormi $df \in \Omega^1(U)$, mille väärtust suvalisel siledal vektorväljal $X \in \mathcal{D}(U)$ määrame valemiga

$$df(X) = Xf. \tag{4.4.5}$$

Olgu $(\phi, V), V \subset U$ muutkonna M lokaalne koordinaatkaart koordinaatfunktsioonidega $x^1, x^2, \ldots, x^m$. Hulgal V on määratud vektorväljad $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$, mis moodustavad reeperivälja ja suvalise vektorvälja $X \in \mathcal{D}(U)$ korral kehtib

$$X\Big|_V = X^i\,\frac{\partial}{\partial x^i},$$

kus vektorvälja komponendid X^i on siledad funktsioonid määramispiirkonnaga V, st $X^i \in C^\infty(V)$. Igale koordinaatfunktsioonile x^i vastab 1-diferentsiaalvorm $dx^i \in \Omega^1(V)$, st

$$x^i \mapsto dx^i.$$

Kasutades valemit (4.4.5) leiame

$$dx^i\,(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j,$$

mis näitab, et igas punktis $p \in V$ kovektorite $\{dx_p^1, dx_p^2, \ldots, dx_p^m\}$ süsteem on kaasruumi T_p^*M baas, kusjuures ta on puutujaruumi T_pM baasi $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\phi(p)}\}$ duaalne baas.

Diferentsiaalvorm $\omega \in \Omega^1(U)$ indutseerib m funktsiooni $\omega_i \in C^\infty(V)$, kus $i = 1, 2, \ldots, m$, järgmiselt:

$$\omega_i = \omega\,(\frac{\partial}{\partial x^i})$$

Lause 4.4.6. *Olgu $\omega \in \Omega^1(U)$ 1-diferentsiaalvorm ja (ϕ, V) muutkonna M koordinaatkaart koordinaatfunktsioonidega $x^1, x^2, \ldots, x^m$ selline, et $V \subset U$. Kehtib*

$$\omega\big|_V \equiv \omega_1\, dx^1 + \omega_2\, dx^2 + \ldots \omega_m\, dx^m. \tag{4.4.6}$$

Kui $f \in C^\infty(U)$, siis 1-diferentsiaalvormi df avaldis koordinaatkaardi (ϕ, V) koordinaatides on

$$df\big|_V = \frac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\, dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m}\, dx^m.$$

Sellest järeldub, et $\Omega^1(V)$ on lõplikult tekitatud vaba moodul üle funktsioonide algebra $C^\infty(V)$ baasiga $\{dx^1, dx^2, \ldots, dx^m\}$. Valemit (4.4.6) nimetame 1-diferentsiaalvormi avaldiseks koordinaatkaardi (ϕ, V) koordinaatides või 1-diferentsiaalvormi avaldiseks lokaalsetes koordinaatides.

Olgu (ψ, W) muutkonna M teine koordinaatkaart koordinaatidega $\acute{x}^1, \acute{x}^2, \ldots, \acute{x}^m$, kusjuures $V \cap W \neq \emptyset$ ja koordinaatkaartide üleminekufunktsioonid on

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(\acute{x}^1, \acute{x}^2, \ldots, \acute{x}^m), \\ \acute{x}^i &= \acute{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^m), \end{aligned}$$

kus $i = 1, 2, \dots, m$. On ilmne, et maatriksid

$$A = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^j}\right), \quad B = \left(\frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^j}\right),$$

on teineteise pöördmaatriksid, st

$$\frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^j}\,\frac{\partial \acute{x}^j}{\partial x^k} = \delta^i_k, \quad \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^j}{\partial \acute{x}^k} = \delta^i_k.$$

Kui ω on 1-diferentsiaalvorm, siis hulgal $V \bigcap W$ võime ta kirjutada nii kaardi (ϕ, V) koordinaatides $x^1, x^2, \dots, x^m$, kui ka kaardi (ψ, W) koordinaatides $\acute{x}^1, \acute{x}^2, \dots, \acute{x}^m$. Järelikult

$$\omega\big|_{V\cap W} = \omega_i\, dx^i, \quad \omega\big|_{V\cap W} = \acute{\omega}_i\, d\acute{x}^i.$$

Kuna diferentsiaalvormi kordajad ω_i on kovariantse tensorvälja komponendid ja 1-diferentsiaalvormid dx^i on kontravariantsed tensorväljad, siis nad teisenevad üleminekul ühelt koordinaatsüsteemilt $x^1, x^2, \dots, x^m$ teisele $\acute{x}^1, \acute{x}^2, \dots, \acute{x}^m$ järgmiselt:

$$\omega_i = \frac{\partial \acute{x}^j}{\partial x^i}\acute{\omega}_j, \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^j}\, d\acute{x}^j.$$

Seega, 1-diferentsiaalvormi ω avaldis kaardi (ψ, W) koordinaatides on

$$\omega\big|_{V\cap W} = \omega_i\, dx^i = \acute{\omega}_j \underbrace{\frac{\partial \acute{x}^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^k}}_{=\delta^j_k} d\acute{x}^k = \acute{\omega}_j\, d\acute{x}^j. \tag{4.4.7}$$

Valemit (4.4.7) nimetatakse 1-diferentsiaalvormi invariantsuseks.

Definitsioon 4.4.7. Lineaarkujutust

$$\underbrace{\theta_p : T_pM \times T_pM \times \ldots \times T_pM}_{r-\text{korda}} \to \mathbb{R}$$

nimetatakse *r-välisvormiks punktis p*, kui ta rahuldab

$$\theta_p(X_{\sigma(1)p}, X_{\sigma(2)p} \ldots, X_{\sigma(r)p}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \theta_p(X_{1p}, X_{2p} \ldots, X_{rp}),$$

kus $\sigma \in S_r$ on arvude $1, 2, \ldots, r$ permutatsioon,

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{kui } \sigma \text{ on paaris permutatsioon} \\ -1 & \text{kui } \sigma \text{ on paaritupermutatsioon} \end{cases}$$

ja $X_{1p}, X_{2p} \ldots, X_{rp}$ on muutkonna M puutujavektorid punktis p.

Definitsioon 4.4.8. Kujutust θ, mis seab muutkonna M lahtise hulga U igale punktile $p \in U$ vastavusse üheselt määratud r-välisvormi θ_p, st $\theta : p \mapsto \theta_p$, nimetatakse r-diferentsiaalvormiks määramispiirkonnaga $U \subset M$. Kui $U = M$, siis r-diferentsiaalvorm θ on määratud kogu muutkonnal M. Funktsiooni $\theta(X_1, X_2 \ldots, X_r)$, kus $X_1, X_2 \ldots, X_r \in \mathcal{D}(U)$ on vektorväljad, määrame valemiga

$$\theta(X_1, X_2 \ldots, X_r)(p) := \theta_p(X_{1p}, X_{2p} \ldots, X_{rp}).$$

Funktsiooni $\theta(X_1, X_2 \ldots, X_r)$ nimetatakse r-diferentsiaalvormi θ väärtuseks vektorväljadel $X_1, X_2 \ldots, X_r$. Diferentsiaalvormi θ nimetatakse siledaks r-diferentsiaalvormiks, kui suvaliste vektorväljade $X_1, X_2 \ldots, X_r \in \mathcal{D}(V), V \subset U$ korral diferentsiaalvormi $\theta\big|_V$ väärtus vektorväljadel $X_1, X_2 \ldots, X_r$ on sile funktsioon.

4.5. Diferentsiaalvormid ja Maxwelli teooria

Minkowski ruumiks või aeg-ruumiks nimetatakse neljamõõtmelist ruumi $\mathbb{R}^4$ koordinaatidega x^μ, kus $\mu = 0, 1, 2, 3$, ja Minkowski meetrikaga η, mille kordajad on

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.5.1}$$

st $\eta_{00} = -1, \eta_{11} = \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \eta_{\mu\nu} = 0$, kui $\mu \neq \nu$. Koordinaati x^0 tõlgendatakse ajaks ja ilma ülaindeksita tähistatakse t, st $x^0 \equiv t$. Koordinaate x^1, x^2, x^3 tõlgendatakse kolmemõõtmelise ruumi koordinaatideks, st $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Järgnevas kolmemõõtmelise ruumi punkti koordinaatidega x, y, z tähistame $\mathbf{x}$, st $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Meetrika η tähendab, et igas punktis $p \in \mathbb{R}^4$ Minkowski ruumi puutujaruum $T_p\mathbb{R}^4$ on varustatud bilineaarvormiga $\eta : T_p\mathbb{R}^4 \times T_p\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, kus

$$\eta(v, w) = \eta_{\mu\nu}\, v^\mu\, w^\nu,$$

ja $v = (p; v^\mu), w = (p; w^\mu) \in T_p\mathbb{R}^4$ on Minkowski ruumi puutujavektorid punktis p. Meetrika kordajatest moodustame ruutvormi

$$\eta(x, dx) = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

kus dx^μ on koordinaatide harilikud diferentsiaalid (mitte välisdiferentsiaalid). Juhime tähelepanu sellele, et Minkowski meetrika ei ole Riemanni meetrika, kuna ta ei ole positiivselt määratud. Minkowski meetrikat nimetatakse pseudo-Riemanni meetrikaks. Seega Minkowski ruum on pseudo-Riemanni muutkond.

Meetrika poolt määratud kontravariantse tensori komponendid moodustavad maatriksi (4.5.1) pöördmaatriksi, st

$$(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.5.2}$$

Seega kehtib $\eta^{\mu\sigma}\eta_{\sigma\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$.

Elektromagnetvälja kirjeldatakse elektromagnetvälja tugevuse abil, mis koosneb elektrivälja tugevuse vektorist $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ ja magnetvälja tugevuse pseudovektorist $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ (vektorit nimetatakse pseudovektoriks, kui ruumi orientatsiooni muutmisel vektor muutub vastandvektoriks, nt vektorite vektorkorrutis). Juhime tähelepanu sellele, et nii elektrivälja tugevus, kui ka magnetvälja tugevus on vektorfunktsioonid kuna nad sõltuvad aeg-ruumi punktist $(x^\mu) = (t, x, y, z)$. Järgnevas meie ei näita sõltuvust aeg-ruumi punktist (või selle punkti koordinaatidest) kirjutades $\mathbf{E}, \mathbf{B}$. Olgu $U \subset \mathbb{R}^4$ vektorfunktsioonide $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ määramispiirkond ja

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z), \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z),$$

kus vektorite komponendid E_x, E_y, E_z ja B_x, B_y, B_z on aeg-ruumi koordinaatide lõpmata diferentseeruvad funktsioonid. Elektromagnetvälja tugevust mõõdetakse eksperimentaalselt kasutades selleks laetuid osakesi. Kui laetud osake liigub elektromagnetväljas, siis tekib laetud osake interaktsioon elektromagnetväljaga ja elektromagnetväli osakest mõjutab jõuga

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \texttt{(Lorentzi jõud)}$$

kus q on osake laeng, $\mathbf{v}$ on osake liikumise kiirusvektor trajektoori antud punktis. Sellest järeldub, et laetud osake liikumist elektromagnetväljas kirjeldatakse võrrandiga

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

kus

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ja $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ on osake liikumistrajektoor (parameetriline joon, kus parameetriks on aeg t) kolmemõõtmelises ruumis ristkoordinaatidega x, y, z, m on osake mass, $v = ||\mathbf{v}||$ on kiirus ning c on valguse kiirus. Kui osake laeng on piisavalt väike, siis osake mõjujõud elektromagnetväljale on väike ja seda võime ignoreerida. Kasutades selliste osakeste voo, mis liigub läbi elektromagnetvälja, ja uurides nende liikumistrajektoore, mõõdetakse elektromagnetvälja tugevust.

Elektromagnetvälja tugevus $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ muutub nii aja jooksul, kui ka ruumis, ja elektromagnetvälja tugevuse muutmine allub järgmistele võrranditele

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, && (4.5.3)\\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E} &= \mathbf{0}, \qquad \texttt{(Faradey seadus)} && (4.5.4)\\
\operatorname{div}\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \texttt{(Gaussi seadus)} && (4.5.5)\\
\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \operatorname{rot}\mathbf{B} &= -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}, \qquad \texttt{(Ampere'i seadus)} && (4.5.6)
\end{aligned}$$

kus ρ on laengu tihedus, $\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$ on vool ja ϵ_0 on permitiivsus. Võrrandeid (4.5.3) - (4.5.6) nimetatakse *Maxwelli võrranditeks*

Minkowski ruum $\mathbb{R}^4$ koordinaatidega x^μ ja Minkowski meetrikaga η on füüsikalise ruumi, milles on fikseeritud inertsiaalsüsteem S, matemaatiline mudel. Minkowski ruumi koordinaadid $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ on tekitatud inertsiaalsüsteemiga S. Olgu $\acute{x}^\mu$ Minkowski ruumi teised koordinaadid, mis on tekitatud teise inertsiaalsüsteemiga $\acute{S}$, kusjuures meie teame, kuidas koordinaadid x^μ avalduvad koordinatide $\acute{x}^\mu$ kaudu, st $x^\mu = x^\mu(\acute{x}^\nu)$. Oletame, et meil on elektromagnetväli, mille tugevus mõõdetud inertsiaalsüsteemis S on $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ja mõõdetud inertsiaalsüsteemis $\acute{S}$ on $\acute{\mathbf{E}}, \acute{\mathbf{B}}$. Moodustame kaks 4-järku ruutmaatriksit

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (\acute{F}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\acute{E}_x & -\acute{E}_y & -\acute{E}_z \\ \acute{E}_x & 0 & \acute{B}_z & -\acute{B}_y \\ \acute{E}_y & -\acute{B}_z & 0 & \acute{B}_x \\ \acute{E}_z & \acute{B}_y & -\acute{B}_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Eksperimendid näitavad, et elektromagnetvälja tugevused $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ja $\acute{\mathbf{E}}, \acute{\mathbf{B}}$ mõõdetud erinevates inertsiaalsüsteemides on omavahel seotud järgmiselt:

$$\acute{F}_{\mu\nu} = F_{\sigma\tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \acute{x}^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial \acute{x}^\nu}.$$

Seega elektromagnetvälja tugevuse komponentidest moodustatud suurus $F_{\mu\nu}$ on 2-kovariantne tensorväli.

Nüüd näitame, kuidas diferentsiaalvorme saab kasutada Maxwelli teoorias. Kovariantse tensorvälja $F_{\mu\nu}$ komponentidest moodustame 2-diferentsiaalvormi F järgmiselt:

$$F = F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\mu < \nu).$$

Diferentsiaalvormi F, mille kordajad on elektromagnetvälja tugevuse komponendid, st nad rahuldavad Maxwelli võrrandeid, nimetame *elektromagnetvälja tugevuse 2-diferentsiaalvormiks*. Arvutame 2-diferentsiaalvormi F välisdiferentsiaali dF. Välisdiferentsiaal dF on 3-diferentsiaalvorm

$$dF = dF_{\mu\nu} \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\, dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \ \ (\mu < \nu). \tag{4.5.7}$$

Minkowski ruumi 3-diferentsiaalvormide mooduli $\Omega^3(\mathbb{R}^4)$ baasiks võime võtta 3-diferentsiaalvorme

$$dt \wedge dx \wedge dy, \quad dt \wedge dy \wedge dz, \quad dt \wedge dz \wedge dx, \quad dx \wedge dy \wedge dz.$$

Selle baasi esimene 3-diferentsiaalvorm (koordinaatide diferentsiaalide järjestuse täpsusega) tekib avaldises (4.5.7) kolm korda järgmiselt:

Indeksite kombinatsioon	3-diferentsiaalvorm	Kordaja tema juures
$\sigma = 0\ \mu = 1\ \nu = 2$	$dt \wedge dx \wedge dy$	$\partial F_{12}/\partial x^0$
$\sigma = 1\ \mu = 0\ \nu = 2$	$dx \wedge dt \wedge dy$	$\partial F_{02}/\partial x^2$
$\sigma = 2\ \mu = 0\ \nu = 1$	$dy \wedge dt \wedge dx$	$\partial F_{01}/\partial x^2$

Seega

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0}\,dt\wedge dx\wedge dy+\frac{\partial F_{02}}{\partial x^2}\,dx\wedge dt\wedge dy+\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2}\,dy\wedge dt\wedge dx= \left(\frac{\partial B_z}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)dt\wedge dx\wedge dy. \tag{4.5.8}$$

Arvutades analoogiliselt kordajad teiste baasivormide juures saame

$$\begin{aligned} dF \quad = \quad & \left(\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)dt\wedge dy\wedge dz+ \\ & \left(\frac{\partial B_y}{\partial t}-\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)dt\wedge dz\wedge dx+ \\ & \left(\frac{\partial B_z}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)dt\wedge dx\wedge dy+ \\ & \left(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz. \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

Kasutades Maxwelli võrrandeid jõuame tulemuseni

$$dF=0. \tag{4.5.10}$$

Teine võimalus valemi (4.5.10) tõestamiseks on kolmemõõtmelise ruumi vektor-analüüsi ja diferentsiaalvormide vahelise seose kasutamine. Meenutame

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \quad &\mapsto \quad \omega^1_{\mathbf{E}}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{dr}=E_x\,dx+E_y\,dy+E_z\,dz, \\ \mathbf{B} \quad &\mapsto \quad \omega^2_{\mathbf{B}}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{dS}=B_x\,dy\wedge dz+B_y\,dz\wedge dx+B_z\,dx\wedge dy, \end{aligned}$$

kus $\mathbf{dr} = (dx, dy, dz), \mathbf{dS} = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$. Kehtivad valemid

$$d\,\omega^1_{\mathbf{E}} = \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot\mathbf{dS}, \quad d\,\omega^2_{\mathbf{B}} = \operatorname{div}\mathbf{B}\cdot dV,$$

kus $dV = dx \wedge dy \wedge dz$ on ruumi $\mathbb{R}^3$ ruumala element (*volume element*). Elektromagnetvälja tugevuse 2-diferentsiaalvormi võime kirjutada kujul

$$F = \omega^1_{\mathbf{E}} \wedge dt + \omega^2_{\mathbf{B}}.$$

Välisdiferentsiaali d Minkowski ruumis võime esitada kujul

$$d = \underbrace{dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}}_{d_t} + \underbrace{dx \wedge \frac{\partial}{\partial x} + dy \wedge \frac{\partial}{\partial y} + dz \wedge \frac{\partial}{\partial z}}_{d_r} = d_t + d_r,$$

kus d_r on välisdiferentsiaal kolmemõõtmelises ruumis. Diferentsiaalidel d_t, d_r on omadused

$$(d_t)^2 = 0, \quad (d_r)^2 = 0, \quad d_t \circ d_r + d_r \circ d_t = 0.$$

Seega

$$\begin{aligned}
dF &= d(\omega^1_{\mathbf{E}} \wedge dt + \omega^2_{\mathbf{B}}) = d\,\omega^1_{\mathbf{E}} \wedge dt + d\,\omega^2_{\mathbf{B}} \\
&= d_t\,\omega^1_{\mathbf{E}} \wedge dt + d_r\,\omega^1_{\mathbf{E}} \wedge dt + d_t\,\omega^2_{\mathbf{B}} + d_r\,\omega^2_{\mathbf{B}} \\
&= -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cdot\mathbf{dr} \wedge \underbrace{dt \wedge dt}_{=0} + \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot\mathbf{dS} \wedge dt + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{dS} \wedge dt + \operatorname{div}\mathbf{B}\cdot dV \\
&= (\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E})\cdot\mathbf{dS} \wedge dt + \operatorname{div}\mathbf{B}\cdot dV = 0. \qquad (4.5.11)
\end{aligned}$$

Seega kehtib

Lause 4.5.1. *Elektromagnetvälja tugevuse 2-diferentsiaalvorm F on kinnine diferentsiaalvorm.*

Tuletame meelde, et elektromagnertvälja tugevuse 2-diferentsiaalvorm on määratud hulgal $U \subset \mathbb{R}^4$, st $F \in \Omega^2(U)$. Teame, et iga täpne diferentsiaalvorm on kinnine. Kuna F on kinnine 2-diferentsiaalvorm, siis kerkib loomulik küsimus: võib olla F on kinnine selle pärast, et ta on täpne? Teiste sõnadega, kas leidub 1-diferentsiaalvorm $\omega \in \Omega^1(U)$ selline, et $F = d\omega$? Vastus sellele küsimusele sõltub hulga U topoloogiast! Teame, et muutkonna topoloogia tähtsaks karakteristikuks on de Rhami kohomoloogia rühmad $H^k(M)$. Kui de Rhami kohomoloogia rühmad $H^k(M), k > 0$ on triviaalsed , st $H^k(M) = \{0\}$, siis tavaliselt öeldakse, et muutkoona M topoloogia on triviaalne. Näiteks, ruumi $\mathbb{R}^n$ või lahtise kera B_r^n korral

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{R}^n) &\simeq \mathbb{R}, \quad H^k(\mathbb{R}^n) = \{0\},\ k > 0, \\ H^0(B_r^n) &\simeq \mathbb{R}, \quad H^k(B_r^n) = \{0\},\ k > 0. \end{aligned}$$

See on samaväärne järgmise väidega:

Poincaré lemma:	*Kui $\theta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n), k > 0$ on sile k-diferentsiaalvorm, siis leidub sile $(k-1)$-diferentsiaalvorm $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ selline, et $\theta = d\,\omega$.*

Poincaré lemma näitab, et *lokaalselt* iga kinnine vorm on täpne. Tõepoolest olgu ω kinnine k-diferentsiaalvorm m-muutkonnal M ja $p \in M$. Teame, et muutkonna suvalise punkti korral leidub selle punkti koordinaatümbrus (ϕ, U) nii, et $p \in U$ ja $\phi : U \to B_r^m$, st U on difeomorfne lahtise keraga raadiusega r ja keskpunktiga alguspunktis. Diferentsiaalvorm $(\phi^{-1})^*(\omega|_U)$ on määratud lahtisel keral B_r^m, ta on kinnine ja vastavalt Poincaré lemmale leidub $(k-1)$-diferentsiaalvorm $\theta \in \Omega^{k-1}(B_r^m)$ selline, et $(\phi^{-1})^*(\omega|_U) = d\theta$. Seega $(k-1)$-diferentsiaalvorm $\phi^*\,\theta$ on määratud muutkonna M lahtisel hulgal U ja

$$d(\phi^*\,\theta) = \phi^*\,d\theta = \phi^* \circ (\phi^*)^{-1}(\omega|_U) = \omega|_U,$$

kust järeldub, et lokaalselt ω on täpne diferentsiaalvorm. Seega küsimus, kas kinnine diferentsiaalvorm on täpne, on muutkonna M globaalse struktuuri küsimus.

Ühiksfääri S^n korral

$$H^0(S^n) \simeq \mathbb{R}, \quad H^k(S^n) = \{0\}\ (1 \le k \le n), \quad H^n(S^n) \simeq \mathbb{R}.$$

Järelikult ruumi $\mathbb{R}^n$ ja lahtise kera B_r^n topoloogia on triviaalne, kuid sfääri topoloogia on mitte triviaalne.

Oletame, et hulga $U \subset \mathbb{R}^4$ de Rhami kohomoloogia rühm $H^2(U)$ on triviaalne, st $H^2(U) = \{0\}$. Sel juhul iga kinnine 2-diferentsiaalvorm on täpne. Seega leidub $\omega \in \Omega^1(U)$ selline, et $F = d\omega$. Olgu

$$\omega = A_\mu\,dx^\mu = A_0\,dx^0 + A_1\,dx^1 + A_2\,dx^2 + A_3\,dx^3.$$

Diferentsiaalvormi ω kordajaid A_μ nimetatakse elektromagnetvälja potentsiaalideks. Leiame, kuidas elektromagnetvälja tugevuse tensori komponendid avalduvad potentsiaalide kaudu. Arvutame

$$F = d\omega = (\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu})\,dx^\mu \wedge dx^\nu \ \ (\mu < \nu).$$

Siit järeldub, et

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}.$$

Ülejäänud Maxwelli võrrandite (Gaussi ja Ampere'i seadus) kirjapanekuks diferentsiaalvormide abil kasutame duaalse diferentsiaalvormi mõistet. Meenutame, et kui ω on sile k-diferentsiaalvorm Riemanni m-muutkonnal M meetrikaga g, siis selle vormi duaalseks diferentsiaalvormiks nimetatakse $(m-k)$-diferentsiaalvormi $*\omega$, mille komponente muutkonna atlase igas koordinaatkaardis lokaalsete koordinaatidega $x_1, x_2, \dots, x_m$ määratakse valemiga

$$\begin{aligned}(*\omega)_{j_1 j_2 \dots j_{m-k}} &= \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_k j_1 j_2 \dots j_{m-k}} g^{i_1 l_1} \dots g^{i_k l_k} \omega_{l_1 l_2 \dots l_k} \\ &= \omega^{i_1 i_2 \dots i_k} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_k j_1 j_2 \dots j_{m-k}},\end{aligned} \tag{4.5.12}$$

kus $\omega^{i_1 i_2 \dots i_k} = g^{i_1 l_1} \dots g^{i_k l_k} \omega_{l_1 l_2 \dots l_k}$, $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_m}$ on Levi-Civita tensor ja $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le m$, $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_{m-k} \le m$.

Arvutame elektromagnetvälja tugevuse diferentsiaalvormi F duaalse diferentsiaalvormi $*F$. Mainime, et nad on 2-diferentsiaalvormid, st $F, *F \in \Omega^2(U)$. Olgu

$$*F = (*F)_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Arvutame

$$
\begin{aligned}
(*F)_{01} &= \epsilon_{2301}\,\eta^{22}\eta^{33}\,F_{23} = F_{23} = B_x,\\
(*F)_{02} &= \epsilon_{1302}\,\eta^{11}\eta^{33}\,F_{13} = -F_{13} = B_y,\\
(*F)_{03} &= \epsilon_{1203}\,\eta^{11}\eta^{22}\,F_{12} = F_{12} = B_z,\\
(*F)_{23} &= \epsilon_{0123}\,\eta^{00}\eta^{11}\,F_{01} = -F_{01} = E_x,\\
(*F)_{13} &= \epsilon_{0213}\,\eta^{00}\eta^{22}\,F_{02} = F_{02} = -E_y,\\
(*F)_{12} &= \epsilon_{0312}\,\eta^{00}\eta^{33}\,F_{03} = -F_{03} = E_z.
\end{aligned}
\tag{4.5.13}
$$

Seega

$$
\begin{aligned}
*\,F &= B_x\,dt\wedge dx + B_y\,dt\wedge dy + B_z\,dt\wedge dz\\
&\quad + E_x\,dy\wedge dz + E_y\,dz\wedge dx + E_z\,dx\wedge dy.
\end{aligned}
\tag{4.5.14}
$$

Kasutades elektrivälja ja magnetvälja vektorvälju, võime kirjutada

$$F = \omega^1_{\mathbf{E}}\wedge dt + \omega^2_{\mathbf{B}}, \quad *F = -\omega^1_{\mathbf{B}}\wedge dt + \omega^2_{\mathbf{E}}.$$

Definitsioon 4.5.2. 2-diferentsiaalvormi F neljamõõtmelisel Riemanni või pseudo-Riemanni muutkonnal nimetatakse ASD-diferentsiaalvormiks (anti-self-dual differential 2-form), kui ta rahuldab tingimust $*F = -F$.

Arvutame duaalse elektromagnetvälja tugevuse diferentsiaalvormi välisdiferentsiaali

$$\begin{aligned} d*F &= -d\omega^1_{\mathbf{B}}\wedge dt + d\omega^2_{\mathbf{E}} = -d_r\omega^1_{\mathbf{B}}\wedge dt + d_t\omega^2_{\mathbf{E}} + d_r\omega^2_{\mathbf{E}} \\ &= -\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{dS}\wedge dt + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\cdot\mathbf{dS}\wedge dt + \mathrm{div}\,\mathbf{E}\cdot dV \\ &= \big(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,\mathbf{B}\big)\cdot\mathbf{dS}\wedge dt + \mathrm{div}\,\mathbf{E}\cdot dV. \end{aligned} \qquad (4.5.15)$$

Nüüd kasutades Maxwelli võrrandeid saame

$$d*F = -\mathbf{j}\cdot\mathbf{dS}\wedge dt + \rho\cdot dV.$$

Moodustame 1-diferentsiaalvormi $J = J_\mu\,dx^\mu = -\rho\,dt + j_x\,dx + j_y\,dy + j_z\,dz$. Selle vormi duaalne vorm on (kontrollige iseseisvalt)

$$*\,J = -\mathbf{j}\cdot\mathbf{dS}\wedge dt + \rho\cdot dV.$$

Seega

$$d\,(*F) = *\,J. \qquad (4.5.16)$$

Võrrandeid

$$dF = 0, \quad d\,(*F) = *\,J, \qquad (4.5.17)$$

nimetatakse Maxwelli võrrandite geomeetriliseks kujuks. Elektromagnetvälja levimist vakuumis ($\rho = j_x = j_y = j_z = 0$, st elektrilaenguid ja voolu ei ole) kirjeldatakse võrranditega

$$dF = 0, \quad d\,(*F) = 0. \qquad (4.5.18)$$

Sel juhul kinnine ASD-diferentsiaalvorm F on võrrandisüsteemi (4.5.18) lahend.

Kirjandus

[1] V. Abramov, *Poincare hüpotees*, Eesti Matemaatika Seltsi Aastaraamat (2003), 56–68. artikli tekst PDF-formaadis

[2] V. Abramov, *Thurstoni hüpotees, Ricci voog ja edusammud Poincare probleemi lahendamisel*, Eesti Matemaatika Seltsi Aastaraamat (2007), 10–30. artikli tekst PDF-formaadis

[3] V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1978.

[4] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemanninan Geometry*, Academic Press, 2003.

[5] S.S. Chern, W. H. Chen and K. S. Lam, *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific, 2000.

[6] C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1999.

[7] C.T.J. Dodson and T. Poston, *Tensor Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1991.

[8] S. Donaldson, *An Application of Gauge Theory to the topology of 4-manifolds*, J. Diff. Geom., **18** (1983), 269–316.

[9] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001.

[10] J.W. Milnor, *Morse Theory*, Ann. of Math. Studies, **51**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1963,

[11] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, Institute of Physics Publishing, 1998.

[12] W.F. Newns and A.G. Walker, *Tangent planes to a differentiable manifold*, J. London Math. Soc. **31** (1956), 400–407.

[13] Peter Petersen, *Riemannian Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **171**, Springer-Verlag, 1998.

[14] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics **94**, Springer-Verlag, 1983

Aineregister